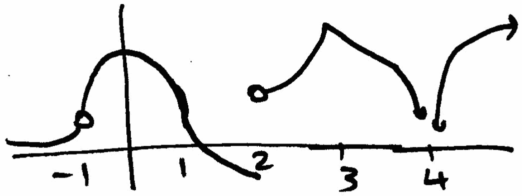
ملف المستوى الثالث

اعداد الأستاذ ثامر قدورة

جد قيم x التي يكون عندها f غير قابل للاشتقاق مع ذكر السبب



عند $x=-1$ (غير متصل)

$x=1$ مماس رأسي

$x=2$ غير متصل

$x=3$ رأس حاد

$x=4$ غير متصل

جد مشتقة كل مما يلي :

$\boxed{\frac{d}{dx} e^x} = e^x$

$\boxed{\frac{d}{dx} e^{x^3}} = e^{x^3} \cdot 3x2$

$\boxed{\frac{d}{dx} 2^x} = 2^x . \ln 2$

$\boxed{\frac{d}{dx} 2^{\sin x}} = 2^{\sin x} . \cos x . \ln 2$

$\boxed{\frac{d}{dx} (\ln x)} = \frac{1}{x}$

$\boxed{\frac{d}{dx} \ln (x^2 + \tan x)} = \frac{2x + \sec^2 x}{x^2 + \tan x}$

$\boxed{\frac{d}{dx} \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$\boxed{\frac{d}{dx} \sqrt{1+x^3}} = \frac{3x2}{2\sqrt{1+x^3}}$

$\boxed{\frac{d}{dx} \sqrt[3]{x}} = \frac{d}{dx} x^{1/3} = \frac{1}{3} x^{-2/3}$

$\boxed{\frac{d}{dx} \sqrt[3]{(x^3+1)^2}} = \cdots = \frac{2}{3} (x^3+1)^{-\frac{1}{3}} . 3x^2$

$\boxed{\frac{d}{dx} \sin x} = \cos x$

$\boxed{\frac{d}{dx} \cos x} = -\sin x$

$\boxed{\frac{d}{dx} \tan x} = \sec^2 x$

$\boxed{\frac{d}{dx} \sec x} = \sec x . \tan x$

$\boxed{\frac{d}{dx} \cot x} = -\csc^2 x$

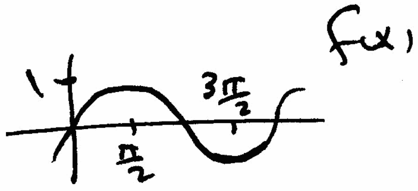
$\boxed{\frac{d}{dx} \csc x} = -\csc x \cot x$

$\boxed{\frac{d}{dx} \left(\frac{x^2}{1+x} \right)} = \frac{(1+x)(2x) - x^2(1)}{(1+x)^2}$

$\boxed{\frac{d}{dx} e^{2x} . \sin x} = e^{2x} \cos x + \sin x . e^{2x} . 2$

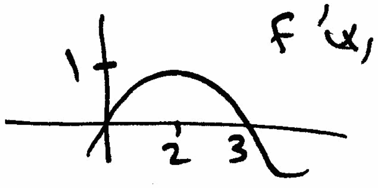
$\boxed{\frac{d}{dx} \sin^3 x} = 3 \sin^2 x \cos x$

$\boxed{\frac{d}{dx} \sec^2 \sqrt{x}} = \overset{\checkmark}{2\sec\sqrt{x}} \; \overset{\checkmark}{\sec\sqrt{x}} \; \overset{\checkmark}{\tan\sqrt{x}} \; \overset{\checkmark}{\frac{1}{2\sqrt{x}}}$



بالاعتماد على الشكل المجاور
الذي يمثل منحنى $f(x)$
ما قيمة $f'(\frac{\pi}{2})$ و $f'(\frac{3\pi}{2})$

الجواب صفر (مماس أفقي)



بالاعتماد على الشكل المجاور
الذي يمثل منحنى $f'(x)$
ما قيمة $f'(2)$ و $f'(3)$

الحل $f'(2) = 1$
$f'(3) = 0$

انتبه الرسم لـ f'
وليس f

أثبت عدم وجود مماس أفقي للاقتران $y = 2e^x + 3x + 5x^3$

$$y' = \underbrace{2e^x}_{>0} + \underbrace{3}_{>0} + \underbrace{15x^2}_{\geq 0} \Longrightarrow$$

المجموع أكبر من صفر

$\Rightarrow y' \neq 0$

لا يوجد مماس أفقي

إذا كانت $y = \log x$ ، أثبت أن $y' = \frac{1}{x \ln 10}$

$$y = \log_{10} x = \frac{\ln x}{\ln 10} = \frac{1}{\ln 10} \ln x \Longrightarrow y' = \frac{1}{\ln 10} \frac{1}{x} = \frac{1}{x \ln 10}$$

إذا كان $x=\sin y$ ، فإن $\frac{dy}{dx}$ تساوي

a) $\cos y$ b) $\sec y$ c) $\csc y$ d) $\sin y$

① طريقة $\frac{dx}{dy}=\cos y \Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{1}{\cos y}=\sec y \Longrightarrow b$

② طريقة $1=\cos y \cdot y' \Rightarrow y'=\frac{1}{\cos y}=\sec y$

إذا كان $y=e^x.\sin x$ ، فإن $y''-2y'$ تساوي

a) $2y$ b) $-2y$ c) y d) $-y$

$$y'=e^x.\cos x+\sin x.e^x$$

$$y''=e^x(\cancel{-\sin x})+\cos x.e^x+\cancel{\sin x\, e^x}+e^x.\cos x$$

$$=2e^x\cos x$$

$$\Rightarrow y''-2y'=2e^x\cos x-2(e^x\cos x+\sin x.e^x)$$

$$=-2e^x\sin x=-2y \Longrightarrow \boxed{b}$$

أثبت أن $\frac{d}{dx}\sec x=\sec x.\tan x$

$$\frac{d}{dx}\frac{1}{\cos x}=\frac{+\sin x}{\cos^2 x}=\frac{\sin x}{\cos x}\cdot\frac{1}{\cos x}=\sec x.\tan x$$

إذا كان $f(x)=\sqrt{\ln x}$, $x>0$ ، فإن $f'(x)$ هي

صيفي 2005
2023

a) $\frac{2f(x)}{x}$ b) $\frac{x}{f(x)}$ c) $\frac{1}{2xf(x)}$ d) $\frac{x}{2f(x)}$

الحل $f'(x)=\frac{\frac{1}{x}}{2\sqrt{\ln x}}=\frac{1}{2x\sqrt{\ln x}}=\frac{1}{2xf(x)}\Longrightarrow\boxed{C}$

جد مشتقة $y = X^{\tan x}$

$$\ln y = \ln X^{\tan x} = \tan x \cdot \ln x$$

$$\frac{y'}{y} = \tan x \cdot \frac{1}{x} + \ln x \cdot \sec^2 x$$

$$\boxed{y' = \underset{(y)}{X^{\tan x}}\left(\frac{\tan x}{x} + \ln x \cdot \sec^2 x\right)}$$

جد مشتقة $y = x\sqrt{\frac{1+\sin x}{\sec^3 x}}$ باستخدام الاشتقاق اللوغاريتمي

$$\ln y = \ln\left(x\sqrt{\frac{1+\sin x}{\sec^3 x}}\right) = \ln x + \ln\left(\frac{1+\sin x}{\sec^3 x}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \ln x + \frac{1}{2}\left(\ln(1+\sin x) - \ln \sec^3 x\right)$$

$$= \ln x + \frac{1}{2}\ln(1+\sin x) - \frac{3}{2}\ln \sec x$$

$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{x} + \frac{1}{2}\,\frac{\cos x}{1+\sin x} - \frac{3}{2}\,\frac{\cancel{\sec x}\cdot\tan x}{\cancel{\sec x}}$$

$$y' = x\sqrt{\frac{1+\sin x}{\sec^3 x}}\left(\frac{1}{x} + \frac{\cos x}{2(1+\sin x)} - \frac{3}{2}\tan x\right)$$

إذا كان $y = \tan t$ ، فإن $\frac{dy}{dt}$ تساوي

a) $\sec^2 t \cdot y'$ b) $\sec^2 t \cdot \frac{dy}{dt}$ c) $\sec^2 t$ d) 0

$$\frac{dy}{dt} = \sec^2 t \longrightarrow \boxed{c}$$

اشتقينا بالنسبة لـ t

إذا كان $y = t^3 + t$ و $x = t^2$ ، جد $\frac{dy}{dx}$ و $\frac{d^2y}{dx^2}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{3t^2+1}{2t} = \frac{3}{2}t + \frac{1}{2}\frac{1}{t}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{d}{dt}\frac{dy}{dx}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{3}{2} - \frac{1}{2t^2}}{2t} = \frac{3}{4t} - \frac{1}{4t^3}$$

إذا كان $y^2 = x^2 - \sin y$ ، جد $\frac{dy}{dx}$ و $\frac{d^2y}{dx^2}$

$$2yy' = 2x - \cos y \cdot y' \Longrightarrow 2yy' + \cos y\, y' = 2x$$

$$y'(2y + \cos y) = 2x \Longrightarrow \boxed{y' = \frac{2x}{2y + \cos y}}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{(2y+\cos y)(2) - 2x(2y' - \sin y\, y')}{(2y+\cos y)^2}$$

$$= \frac{4y + 2\cos y - 2x\left(2\frac{2x}{2y+\cos y} - \sin y \cdot \frac{2x}{2y+\cos y}\right)}{(2y+\cos y)^2}$$

إذا كان $xy + e^y = e^2$ ، جد $\frac{dy}{dx}$ عند $(0,2)$

$$xy' + y \cdot 1 + e^y y' = 0 \Longrightarrow xy' + e^y y' = -y$$

$$y'(x + e^y) = -y \Longrightarrow y' = \frac{-y}{x + e^y} \xrightarrow[y=2]{x=0} y' = \frac{-2}{0 + e^2} = -2e^{-2}$$

جيل 2005
2023

إذا كان $y = x^{x^2}$ ، فإن $\frac{d}{dx}(\ln y)$ هي

a) $x(1-\ln x^2)$
b) $x(1+(\ln x)^2)$
c) $x(1+\ln x^2)$
d) $x(1-(\ln x)^2)$

حل

$$\frac{d}{dx}(\ln y) = \frac{d}{dx}\left(\ln x^{x^2}\right) = \frac{d}{dx}(x^2 \cdot \ln x)$$

$$= x^2 \cdot \frac{1}{x} + \ln x \cdot 2x = x + 2x\ln x$$

$$= x(1+2\ln x) = x(1+\ln x^2) \Rightarrow \boxed{C}$$

إذا كان $s(t) = 3 + 5\cos 2t$ يمثل جسم معلق بزنبرك

① جد موقع الاتزان للجسم

② أثبت أن السرعة تكون أكبر ما يمكن عندما يمر الجسم بموقع الاتزان

①
$$v(t) = -10\sin 2t$$
$$a(t) = -20\cos 2t = 0 \Longrightarrow \cos 2t = 0$$
$$s(t) = 3 + 5(0)$$
$$\boxed{s(t) = 3} \longrightarrow$$ موقع الاتزان

②
$$v(t) = -10\sin 2t$$
$$v(t) = 10|\sin 2t|$$

أكبر

$$|\sin 2t| = 1$$
$$\sin 2t = \pm 1$$
$$\sin^2 2t + \cos^2 2t = 1$$
$$\pm 1 + \cos^2 2t = 1$$
$$\cos 2t = 0$$

أكبر سرعة

$$s(t) = 3 + 5(0) = 3 \Longrightarrow$$ عند موقع الاتزان

إذا علمت أن حرارة قطعة من الحديد تتغير مع الزمن حسب المعادلة $T = 100t + e^{-t}$

t : بالثواني
T : حلفي

① جد معدل تغير حرارة الحديد بعد مرور ثانيتين

② متى يصبح معدل تغير حرارة الحديد 99.5

$$\frac{dT}{dt} = 100 - e^{-t}$$

① $\frac{dT}{dt} = 100 - e^{-2}$

② $\frac{dT}{dt} = 99.5 \Rightarrow 100 - e^{-t} = 99.5$

$$e^{-t} = 0.5$$

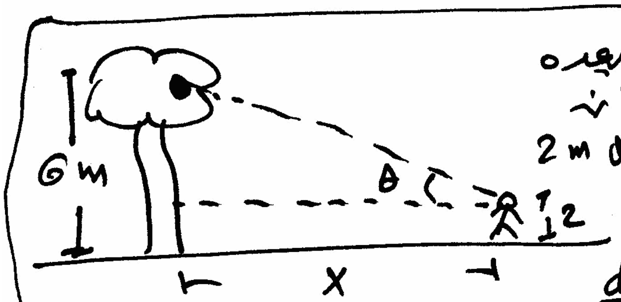
$$-t = \ln 0.5 \Rightarrow \boxed{t = \ln 2}$$

هرم قاعدته مربعة الشكل، يعطى طول ضلعها بالمقدار $\sqrt{t}$ وارتفاع الهرم بالمقدار $(t+1)$، جد معدل تغير حجم الهرم عند أي لحظة

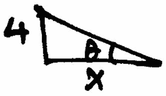
a) $2t+1$ b) $\frac{2t+1}{3}$ c) $\sqrt{t}$ d) $\frac{\sqrt{t}}{3}$

$$V = \frac{1}{3} \text{ مساحة القاعدة} \times \text{الارتفاع} = \frac{1}{3}(\sqrt{t})^2(t+1)$$

$$V = \frac{1}{3}(t^2+t) \Longrightarrow \frac{dV}{dt} = \frac{1}{3}(2t+1) \Rightarrow \boxed{b}$$

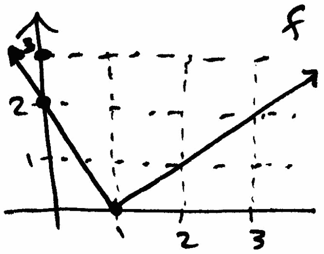


شخص يسير باتجاه شجرة بحيث أن بعده عنها x وزاوية نظره θ، إذا علمت أن ارتفاع التفاحة عن الأرض 6m وطول الرجل 2m فأثبت أن معدل تغير زاوية النظر (θ) بالنسبة للمسافة (x) هو $\frac{d\theta}{dx} = \frac{-4}{x^2+16}$



$$\tan\theta = \frac{4}{x} \Rightarrow \sec^2\theta \frac{d\theta}{dx} = \frac{-4}{x^2} \Rightarrow \frac{d\theta}{dx} = \frac{-4}{x^2(\sec^2\theta)}$$

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{-4}{x^2(1+\tan^2\theta)} = \frac{-4}{x^2(1+\frac{4^2}{x^2})} = \frac{-4}{x^2+16}$$



بالاعتماد على الشكل المجاور جد كل مما يلي

① $f'(1)$, $f'(0)$

② $\frac{d}{dx}(x\,f(x))$ عند $x=3$

③ $\frac{d}{dx} f^2(x)$ عند $x=3$

الحل ① $f'(1)$ غير موجودة ☒ $f'(0) = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2-0}{0-1} = -2$

② $\frac{d}{dx}(x\,f(x)) = x\,f'(x) + f(x)\cdot 1$

عند $x=3$

$= 3\,f'(3) + f(3)$

$= 3(1) + 2$

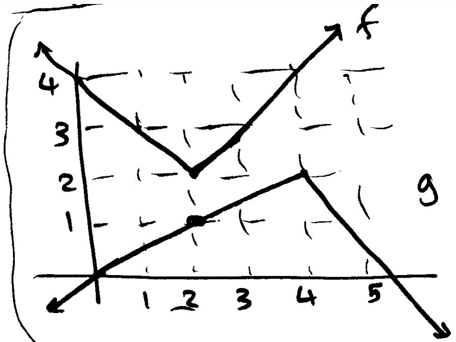
$= 5$

$f'(3) = \frac{\Delta y}{\Delta x}$

$= \frac{2-1}{3-2} = 1$

③ $\frac{d}{dx} f^2(x) = 2f(x)\,f'(x)$

$x=3 \Longrightarrow 2f(3)\,f'(3) = 2(2)\cdot 1 = 4$



بالاعتماد على الشكل المجاور الذي يمثل منحنى $f(x)$ & $g(x)$ ، جد

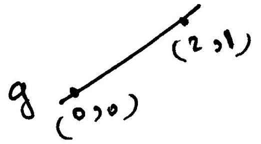
$(f\circ g)'(2)$

الحل $f'(g(2))\cdot g'(2)$

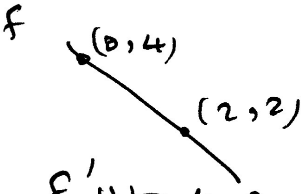
$= f'(1)\cdot g'(2)$

$= -1\cdot\frac{1}{2}$

$= \boxed{-\frac{1}{2}}$



$g'(2) = \frac{1-0}{2-0} = \frac{1}{2}$



$f'(1) = \frac{4-2}{0-2} = -1$

ميل مماس الاقتران $f(x)=\ln x$ عند نقطة تقاطع منحنى الاقتران مع المحور x هو:

a) 1　　b) −1　　c) 0　　d) $\frac{1}{2}$

$$\ln x=0 \Longrightarrow x=1$$

$$f'(x)=\frac{1}{x} \Rightarrow m=\frac{1}{1}=1 \Longrightarrow a$$

مماس الاقتران $f(x)=\ln x$ عند النقطة $(e^2,2)$ يقطع المحور x عند النقطة:

a) $(e^2,0)$　　b) $(-e^2,0)$　　c) $(e^{-2},0)$　　d) $(1,0)$

$$f'(x)=\frac{1}{x} \Longrightarrow m=\frac{1}{e^2}$$

$$y-2=\frac{1}{e^2}\left(x-\frac{1}{e^2}\right) \Longrightarrow \boxed{y=\frac{x}{e^2}+1}=0 \Longrightarrow x=-e^2$$

رسم عمودي على المماس للاقتران $y=k e^x$, $(k>0)$ عند نقطة تقاطع منحنى الاقتران مع المحور y ، فقطع العمودي المحور x عن النقطة $(100,0)$، فما قيمة k

$$x=0$$

$$y=k e^0=k$$

$$y'=k e^x \longrightarrow y'(0)=k e^0=k$$

$$\Longrightarrow y-y_1=-\frac{1}{m}(x-x_1)$$

$$y-k=-\frac{1}{k}(x-0) \Rightarrow \boxed{y=k-\frac{x}{k}}$$

$$0=k-\frac{100}{k} \Longrightarrow k^2=100$$

$$\boxed{k=10}$$

2006

إذا كان مماس منحنى الاقتران $y=(x-3)^{\sqrt{x}}$ عند النقطة (4،1) يقطع المحور x في النقطة B والمحور y في النقطة C ، فجد مساحة ΔOBC ، حيث O نقطة الاصل

الحل $\ln y = \ln(x-3)^{\sqrt{x}} = \sqrt{x}\ln(x-3)$

$$\frac{y'}{y} = \sqrt{x}\cdot\frac{1}{x-3} + \ln(x-3)\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

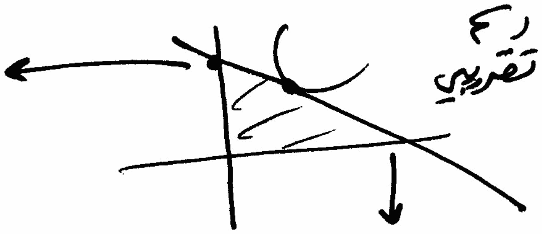
$$y' = (x-3)^{\sqrt{x}}\left(\frac{\sqrt{x}}{x-3} + \frac{\ln(x-3)}{2\sqrt{x}}\right)$$

$$m = y'(4) = (1)^4\left(\frac{2}{1} + \frac{\ln 1}{2\sqrt{4}}\right) \Rightarrow \boxed{m=2}$$

$$\Rightarrow y-y_1 = m(x-x_1) \Rightarrow y-1 = 2(x-4) \Rightarrow \boxed{y=2x-7}$$

$x=0$

$\Rightarrow y=-7$



$y=0$

$\Rightarrow 2x-7=0$

$x=\frac{7}{2}$

$$A = \frac{1}{2}|\Delta x|\cdot|\Delta y|$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{7}{2}\right)(7) = \frac{49}{4}$$

ميل مماس الاقتران $x^3+y^3=2$ عند نقطة تقاطعه مع المستقيم $y=x$ هو:

a) 1 b) -1 c) 0 d) 2

الحل $x^3+(x)^3=2 \Rightarrow x=1 \longleftrightarrow y=1$

$3x^2+3y^2y'=0 \Rightarrow y' = -\frac{x^2}{y^2} \Rightarrow m = -\frac{(1)^2}{(1)^2} = -1 \Rightarrow \boxed{b}$

جد احداثيات نقطة في الربع الاول ، على منحنى $x^2+y^2=2$ ، بحيث يكون مماس المنحنى موازياً المستقيم $y=4-x$

الحل $2x+2yy'=0 \Rightarrow y'=\frac{-x}{y}$

$y'=-1$ $\Longrightarrow$

توازي

$y'=y'$

$\frac{-x}{y}=-1 \Rightarrow \boxed{y=x}$

$\boxed{x^2+y^2=2}$ $\Leftarrow$

$x^2+x^2=2$

$2x^2=2 \Rightarrow x=1 \Rightarrow y=1$

$(1,1)$

جد احداثيات نقطة في الربع الثاني ، على منحنى $x^2+y^2=2$ بحيث يكون مماس المنحنى عندها عمودياً على المستقيم $y=4-x$

$2x+2yy'=0 \Longrightarrow y'=-\frac{x}{y}$

$y'=-1$ $\Longrightarrow$

$y'\cdot y'=-1$

$-\frac{x}{y}\cdot -1=-1 \Rightarrow \boxed{y=-x}$

$\boxed{x^2+y^2=2}$

$x^2+(-x)^2=2$

$x=1$

$\boxed{x=-1} \longrightarrow y=1 \Longrightarrow (-1,1)$

العلاقة $x^2+y^2=2$ مماس أفقي عند x تساوي

a) 1 b) ±1 c) 0 d) $\pm\sqrt{2}$

$y'=\frac{-x}{y}=0 \Rightarrow x=0 \Longrightarrow \boxed{c}$

العلاقة $x^2+y^2=2$ مماس رأسي عند x تساوي:

a) 1 b) ±1 c) 0 d) $\pm\sqrt{2}$

$y'=\frac{-x}{y} \longrightarrow y=0 \Rightarrow x^2+0^2=2 \Rightarrow x=\pm\sqrt{2} \Rightarrow \boxed{d}$

جيل 2005

2023

إذا كانت $y^2 = 2\cos\left(\frac{\pi}{3} e^{\ln x}\right)$ ، فإن ميل المماس لمنحنى العلاقة y عند النقطة (1,1) هو :

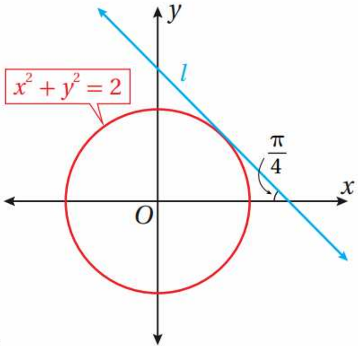
a) $-\frac{\pi}{6}$ b) $\frac{\pi}{6}$ c) $-\frac{\pi\sqrt{3}}{6}$ d) $\frac{\pi\sqrt{3}}{6}$

الحل $y^2 = 2\cos\left(\frac{\pi}{3}x\right)$

$$2yy' = -2\sin\left(\frac{\pi}{3}x\right)\cdot\frac{\pi}{3}$$

$$2(1)y' = -2\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\cdot\frac{\pi}{3}$$

$$m = y' = -\frac{2}{2}\,\frac{\sqrt{3}}{2}\,\frac{\pi}{3} \Rightarrow m = -\frac{\pi\sqrt{3}}{6} \Longrightarrow \boxed{C}$$



يُبيِّن الشكل المجاور منحنى العلاقة: $x^2 + y^2 = 2$، والمستقيم l الذي يُمثِّل مماسًّا لمنحنى العلاقة في الربع الأوَّل. أجد معادلة المستقيم l.

لتكن نقطة التماس $A(x\ ,\ y\ )$

باشتقاق طرفي العلاقة $x^2 + y^2 = 2$ بالنسبة إلى x نجد أنّ:

$$2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

إذن، ميل المماس l هو $-\frac{x}{y}$

لكن ميل المماس l هو -1 $\tan\frac{3\pi}{4} =$

إذن، $-\frac{x}{y} = -1 \Rightarrow x = y$

وبتعويض $(x\ ,\ y\ )$ في المعادلة المعطاة نجد أنّ:

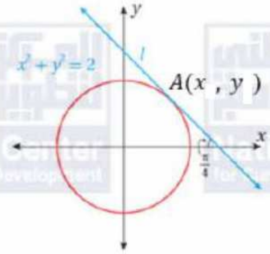
$$x^{2} + y^{2} = 2$$

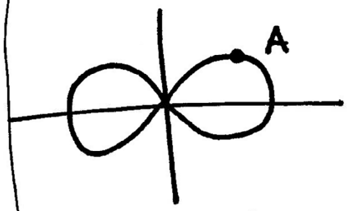
وبتعويض $x = y$ في هذه المعادلة نجد أنّ:

$$x^{2} + x^{2} = 2 \Rightarrow 2x^{2} = 2 \Rightarrow x^{2} = 1 \Rightarrow x = 1$$

إذن، نقطة التماس هي: $A(1,1)$، ومعادلة المماس l هي:

$$y - 1 = -1(x - 1) \Rightarrow y = -x + 2$$





الشكل المجاور يمثل منحنى المعادلة الوسيطية

$x = 3\cos t$ ، $y = 2\sin 2t$ $\quad 0 \le t < 2\pi$

① جد ميل المماس عند نقطة الاصل

② إذا كان المماس عند النقطة A أفقي ، فما احداثيات A

① $\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{4\cos 2t}{-3\sin t}$

$y=0 \Longrightarrow 2\sin 2t = 0 \Longrightarrow 2t = 0, \pi, 2\pi, 3\pi, 4\pi$

$\Longrightarrow t = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi$

$x=0 \Longrightarrow 3\cos t = 0 \Longrightarrow t = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \Longrightarrow t = \{\frac{\pi}{2}, 3\frac{\pi}{2}\}$ المشترك

$$m\Big|_{t=\frac{\pi}{2}} = \frac{4\cos(2\frac{\pi}{2})}{-3\sin\frac{\pi}{2}} = \frac{4}{3}$$

$$m\Big|_{t=\frac{3\pi}{2}} = \frac{4\cos(2\frac{3\pi}{2})}{-3\sin\frac{3\pi}{2}} = \frac{-4}{3}$$

② $m=0 \Longrightarrow \frac{4\cos 2t}{-3\sin t} = 0 \Longrightarrow \cos 2t = 0$

$2t = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \frac{7\pi}{2}$

$t = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$

$x = 3\cos\frac{\pi}{4} = \frac{3}{\sqrt{2}}$

$y = 2\sin\frac{2\pi}{4} = 2 \Longrightarrow$ الربع الاول

$\Longrightarrow A(\frac{3}{\sqrt{2}}, 2)$

إذا مثل l أي مماس لمنحنى العلاقة الوسيطية
$x=t^2$ ، $y=(t-1)^2$ ، $0<t<1$
عند النقطة $(t^2,(t-1)^2)$ ، فأثبت أن مجموع المقطع x
والمقطع y للمستقيم l يساوي 1

الحل $\frac{dy}{dx}=\frac{dy/dt}{dx/dt}=\frac{2(t-1)}{2t}=\frac{t-1}{t}$

$y-y_1=m(x-x_1)\Longrightarrow$

$$\boxed{y-(t-1)^2=\frac{t-1}{t}(x-t^2)}$$

السؤال قال عند أي نقطة
(أي مماس) $\Longrightarrow (x,y)$
$\Longrightarrow (t^2,(t-1)^2)$

$$y=\frac{t-1}{t}x-\frac{t-1}{\cancel{t}}t^{\cancel{2}}+(t-1)^2$$

$$y=\frac{t-1}{t}x-\cancel{t^2}+t+\cancel{t^2}-2t+1$$

$$\boxed{y=\frac{t-1}{t}x-t+1}$$

المقطع $x \Longrightarrow y=0 \Longrightarrow \frac{t-1}{t}x-t+1=0$

$\frac{t-1}{t}x=t-1 \Longrightarrow \boxed{x=t}$

المقطع $y \Longrightarrow x=0 \Longrightarrow y=0-t+1 \Longrightarrow \boxed{y=1-t}$

المقطع x + المقطع y $=t+1-t=1$

أ. ثامر

إذا كان $y = l^2$ ، $x = (l+1)^2$ ، فإن $\frac{dy}{dx}$ عند $l=1$ تساوي

a) $\frac{1}{2}$　　b) 2　　c) 32　　d) 4

الحل
$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dl}{dx/dl} = \frac{2l}{2(l+1)} = \frac{l}{l+1}$$

وسطية

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{l=1} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

سنوات 2019

إذا كان $x^2+y^2=32$ ، فإن $\frac{dy}{dx}$ عند النقطة $(4,-4)$ تساوي

a) 1　　b) −1　　c) 2　　d) −2

$$2x+2yy'=0 \Rightarrow y' = -\frac{x}{y} = \frac{-4}{-4} = 1 \Rightarrow \boxed{a}$$

سنوات 2019

إذا كان $f(x)=8+2x-x^2$ ، $x \in R$ ، فإن منحنى الاقتران f مماس أفقي عند النقطة

a) $(1,10)$　　b) $(-2,0)$　　c) $(-2,8)$　　d) $(1,9)$

$$f(x) = 2-2x=0 \longrightarrow x=1$$
$$f(1) = 8+2-1 = 9 \Longrightarrow (1,9) \longrightarrow \boxed{d}$$

جيل 2005

2023

إذا كان $3y^2=4x^2+xy$ ، فأثبت ؟ أن $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(-a,a)} = -1$ ، جد a ، حيث $a \neq 0$

الحل
$$6y \cdot y' = 8x + xy' + y \cdot 1$$

$$6y\,y' - xy' = 8x+y$$
$$y'(6y-x) = 8x+y \Rightarrow y' = \frac{8x+y}{6y-x}$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{\substack{x=a\\y=a}} = \frac{8(-a)+a}{6(a)-(-a)} = \frac{-7a}{7a} = -1$$

سنوات 2019

إذا كان $f(x)= \sin x \cdot \cos x$ ، فإن قيمة $f'(\frac{\pi}{2})$ تساوي

a) 2 b) 1 c) 0 d) −1

$$f(x)= \sin x(-\sin x) + \cos x \cdot \cos x$$
$$= -\sin^2 x + \cos^2 x$$
$$f'(\tfrac{\pi}{2}) = -1+0 = -1 \Longrightarrow \boxed{d}$$

سنوات 2019

إذا كان $f(x) = \frac{1}{x^2}$ ، وكان $(f\circ g)'(1) = 4$ وكان $g(1) = 2$ ، فإن $g'(1)$ تساوي

a) 8 b) 16 c) −16 d) $-\frac{1}{4}$

$$f(x)= \frac{1}{x^2} \longrightarrow f'(x) = \frac{-2}{x^3}$$
$$(f\circ g)'(1) = 4 \Rightarrow f'(g(1))\, g'(1) = 4$$
$$f'(2)\cdot g'(1) = 4 \Rightarrow \frac{-2}{(2)^3}\, g'(1) = 4 \Rightarrow \boxed{g'(1) = -16} \quad \boxed{C}$$

سنوات 2019

يتحرك جسيم على خط مستقيم وفق العلاقة $s(t) = t^2+7t$ حيث s: موقع الجسيم بالأمتار ، t: الزمن بالثواني . فإذا كانت السرعة المتجهة للجسيم عند $t = m$ تساوي 10 m/s ، فما قيمة الثابت m

a) $\frac{3}{2}$ b) 2 c) $\frac{5}{2}$ d) 3

الحل $V(t) = 2t+7 \Rightarrow V(m) = 2m+7 = 10 \Rightarrow m = \frac{3}{2}$ $\boxed{a}$

2022 النقطة الواقعة على منحنى $f(x)=x^2-2x-3$ التي يكون عندها المماس لمنحنى الاقتران f موازياً المستقيم الذي معادلته $y-4x=-20$ هي

a) $(0,-3)$ b) $(-1,0)$ c) $(3,0)$ d) $(1,-4)$

$f'(x)=2x-2 \Longrightarrow f'=y'$

$y'=4$

$2x-2=4 \longrightarrow \boxed{x=3} \Longrightarrow (3,0)$ $\boxed{c}$

$f(3)=(3)^2-2(3)-3=0$

2022 إذا كان $f(x)=x+\cos x$ ، حيث $x\in[0,2\pi]$ ، فإن قيمة x التي يكون عندها للاقتران f مماساً أفقياً تساوي

a) 0 b) π c) $\frac{\pi}{2}$ d) 2π

$f'(x)=1-\sin x=0 \Longrightarrow \sin x=1 \Longrightarrow x=\frac{\pi}{2}$ $\boxed{C}$

2022 يتحرك جسم على خط مستقيم وفق العلاقة $s(t)=6t^2-t^3+7$ حيث s الموقع بالأمتار، t الزمن بالثواني. فإن موقع الجسم في اللحظة التي ينعدم فيها تسارعه تساوي

a) 12 b) 19 c) 39 d) 23

$V=12t-3t^2 \longrightarrow a=12-6t=0 \Longrightarrow t=2$

$s(3)=6(2)^2-(2)^3+7=$

$=24-8+7=23 \Longrightarrow \boxed{d}$

2022 إذا كان $f(x) = \sec x + \tan x$ ، فإن $f'(\frac{\pi}{6})$ تساوي

a) -2 b) -1 c) 1 d) 2

الحل $f'(x) = \sec x . \tan x + \sec^2 x$

$$f'(\tfrac{\pi}{6}) = \sec\tfrac{\pi}{6} \tan\tfrac{\pi}{6} + \sec^2\tfrac{\pi}{6}$$

$$= \frac{2}{\sqrt3}\ \frac{1}{\sqrt3} + \left(\frac{2}{\sqrt3}\right)^2 = \frac23 + \frac43 = 2 \Longrightarrow \boxed{d}$$

2022 إذا كان $f(x) = 4\sin(\frac{\pi}{x})$ ، فإن $f'(\frac12)$ تساوي

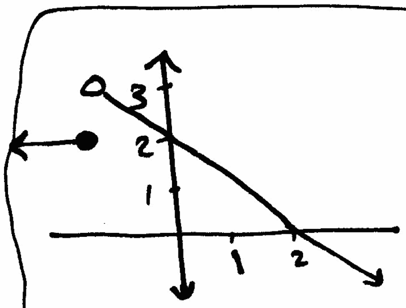
a) 4π b) -4π c) -16π d) 16π

$$f'(x) = 4\cos(\tfrac{\pi}{x}) . \frac{-\pi}{x^2}$$

$$f'(\tfrac12) = 4\cos\left(\frac{\pi}{\frac12}\right) . \frac{-\pi}{(\frac12)^2} = 4\cos 2\pi . -4\pi$$

$$= -16\pi \Longrightarrow \boxed{c}$$

2022 معتمداً الشكل المجاور الذي يمثل منحنى الاقتران f ، أجب عن الفقرتين الآتيتين



- ما قيمة $(\frac{f'}{2f})'(0)$

a) $-\frac18$ b) $-\frac14$ c) $\frac14$ d) $\frac18$

- ما قيمة $f(-1)$ ؟

a) 0 b) 3 c) 2 d) غير موجودة

- $$\left(\frac{f'}{2f}\right)'(0) = \frac{2f . f'' - f' . 2f'}{(2f)^2}(0) = \frac{2(2)(0) - (-1) . 2(-1)}{(2(2))^2} = -\frac18 \quad \boxed{a}$$

- $f'(-1)$ غير موجودة $\longrightarrow \boxed{d}$

(30)

2022

إذا كان $y = f(x)$ ، وكان $\frac{dy}{dx} = a\sqrt{y}$ ، $a>0$ ، $y>0$
وكان $\frac{d^2y}{dx^2} = 32$ ، فإن قيمة الثابت a تساوي
a) 2 b) 4 c) 16 d) 8

الحل

$$\frac{dy}{dx} = a\sqrt{y} \xrightarrow[x \text{ لـ}]{\text{اشتقها بالنسبة}} \frac{d^2y}{dx^2} = a \cdot \frac{y'}{2\sqrt{y}}$$

$$\Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{a}{2\cancel{\sqrt{y}}} \cdot a\cancel{\sqrt{y}} \Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{a^2}{2} = 32$$

$$a^2 = 64$$
$$\boxed{a = +8} \Rightarrow \boxed{d}$$
$$a = -8$$

جد $\frac{d^2y}{dx^2}$ للمعادلة الوسيطية الآتية عند $t=1$
$x = t^3 - 3t^2 + 1 \quad , \quad y = t^2 + 2$

جيل 2005
2023

الحل

$$\frac{dx}{dt} = 3t^2 - 6t$$

$$\frac{dy}{dt} = 2t$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{2t}{3t^2-6t} = \frac{2t}{t(3t-6)} = \frac{2}{3t-6}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{-2 \cdot 3}{(3t-6)^2}}{3t^2-6t}$$

$$\Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-6}{(3t^2-6t)(3t-6)^2}$$

$$\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=1} = \frac{-6}{(3-6)(3-6)^2} = \frac{-6}{-3 \cdot (9)} = \frac{+2}{9}$$

يمثل الاقتران $s(t)=t^2-7t+6$ ، $t\geq 0$ ، موقع جسم يتحرك في خط مستقيم . حيث s الموقع بالأمتار . t الزمن بالثواني
العبارة التي تصف الجسم بصورة صحيحة عند $t=1$ هي

a) يتحرك الجسم في الاتجاه السالب
b) الموجب " " "
c) الجسم في حالة سكون لحظي
d) الجسم في موقعه الابتدائي

$$V(t)=2t-7 \longrightarrow V(1)=2-7=-5 \longrightarrow$$ يتحرك بالاتجاه السالب

$\boxed{a}$

إذا كان $f(x)=e^x \cdot x^e$ ، فإن قيمة $f'(e)-f(e)$ تساوي

a) e^{2e} b) e c) 1 d) 0

$$f'(x)= e^x \cdot e\, x^{e-1} + x^e e^x$$

$$f'(e) = e^e\, e\, e^{e-1} + e^e e^e$$

$$\boxed{f'(e) = e^{2e} + e^{2e}} \qquad f(e) = e^e e^e = e^{2e}$$

$$f'(e)-f(e) = e^{2e}+e^{2e}-e^{2e} = e^{2a} \longrightarrow \boxed{a}$$

وزاري
2005
2023

جد مشتقة $f(x)=\left(\cot\left(\tan^2\sqrt{2x^3+1}\right)\right)^5$

الحل $$f'(x) = 5\left(\cot(\tan^2\sqrt{2x^3+1}\right)^4 \cdot -\csc^2\left(\tan^2\sqrt{2x^3+1}\right)$$

$$\cdot\, 2\tan\sqrt{2x^3+1} \cdot \sec^2\sqrt{2x^3+1} \cdot \frac{6x^2}{2\sqrt{2x^3+1}}$$

إذا كان $f(x)=\log_2(2x)$ ، فإن $f''(1)$

a) $-\ln 2$ b) $-\frac{1}{\ln 2}$ c) $\ln 2$ d) $\frac{1}{\ln 2}$

$$f'(x) = \frac{1}{\ln 2}\ \frac{2}{2x} = \frac{1}{\ln 2}\ \frac{1}{x}$$

$$f''(x) = \frac{1}{\ln 2} \cdot \frac{-1}{x^2} \Longrightarrow f''(1) = \frac{1}{\ln 2} \cdot \frac{-1}{1} = \frac{-1}{\ln 2} \Longrightarrow \boxed{b}$$

إذا كان $f(x) = \pi^x + x^\pi$ ، فإن $f'(0)$ تساوي

a) $\pi \ln \pi$ b) $\pi + \ln \pi$ c) $\ln \pi$ d) 0

الحل

$$f'(x) = \pi^x \cdot \ln \pi + \pi x^{\pi - 1}$$

$$f'(0) = \pi^0 \ln \pi + \pi (0)^{\pi-1} = \ln \pi \Longrightarrow \boxed{c}$$

إذا كان $x = \cos t$, $y = \sin t$ ، فإن معادلة العمودي على مماس المعادلة الوسيطية عند $t = \frac{\pi}{4}$ هي

a) $y = -x$ b) $y = x - 1$ c) $y = 1 - x$ d) $y = x$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{\cos t}{-\sin t} = -\cot t$$

$$m = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=\frac{\pi}{4}} = -\cot\frac{\pi}{4} = -1$$

$$x = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Longrightarrow y - y_1 = \frac{-1}{m}(x - x_1)$$

$$y = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad y - \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{-1}{-1}\left(x - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$\boxed{y = x} \qquad \boxed{d}$$

2019 جد قياس الزاوية التي يصنعها مماس منحنى العلاقة
$2y^2+2x^2-4x+12y+4=0$
عند النقطة (3،-1) مع الاتجاه الموجب لمحور x
ثم جد معادلة هذا المماس

الحل $4yy' + 4x - 4 + 12y' = 0$

$4yy' + 12y' = 4 - 4x$

$y'(4y+12) = 4 - 4x \Longrightarrow y' = \frac{4-4x}{4y+12}$

$m = y'\Big|_{\substack{x=3 \\ y=-1}} = \frac{4(-1)+12}{4-4(3)} = \frac{8}{-8} = -1$

$\tan\theta = -1 \Longrightarrow \boxed{\theta = \frac{3\pi}{4}}$

ما عليها علامة

$y - y_1 = m(x - x_1)$

$y+1 = -1(x-3) \Longrightarrow \boxed{y = -x+2}$

السؤال عليه 15 علامة

والحل السابق نموذجي

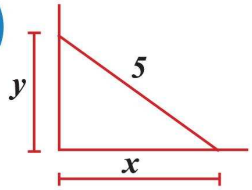
تفاءلوا خير

المعدلات المرتبطة بالزمن

سؤال

سلم طوله 5 m يرتكز بطرفه العلوي على حائط عمودي ، و الطرف السفلي على ارض أفقية . إذا انزلق الطرف السفلي مبتعداً عن الحائط بمعدل 2 m/s فجد : سرعة أنخفاض الطرف العلوي للسلم عندما يكون طرفه السفلي على بعد 3m عن الحائط

الحل



$$\frac{dx}{dt} = 2$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x = 3} = ?$$

$$x^2 + y^2 = 25$$

$$2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt} = 0$$

$$(3)(2) + (4)\frac{dy}{dt} = 0$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{-3}{2}$$

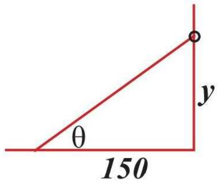
$$3^2 + y^2 = 25$$

$$y = 4$$

سؤال

يرتفع بالون رأسياً إلى أعلى بسرعة مقدارها 42 m/s . إذا تم رصد البالون من مشاهد على الارض يبعد 150 m عن موقع البالون على الارض . فجد معدل تغير زاوية ارتفاع نظر المشاهد للبالون عندما يكون البالون على ارتفاع 150 m عن سطح الارض.

الحل



$$\frac{dy}{dt} = 42$$

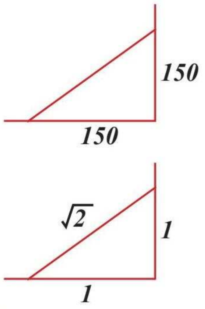
$$\left.\frac{d\theta}{dt}\right|_{y = 150} = ?$$

$$\tan\theta = \frac{y}{150}$$

$$\sec^2\theta\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{150}\frac{dy}{dt}$$

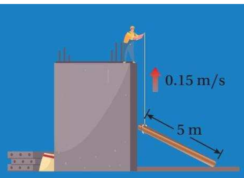
$$(\sqrt{2})^2\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{150}(42)$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{42}{300} = \frac{7}{50}$$

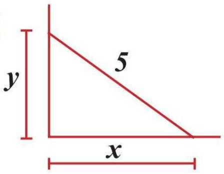


$$\sin\theta = \sqrt{2}$$

بناء : يسحب عامل بناء لوحا خشبيا طوله 5m إلى الأعلى بجانب مبنى لم يكتمل إنشاؤه بعد، وذلك باستعمال حبل رُبِط به أحد طرفي اللوح كما في الشكل المجاور ، إذا افترضت أن طرف اللوح المربوط بالحبل يتبع مساراً عمودياً على جدار المبنى ، وأن العامل يسحب الحبل بمعدل 0.15 m/s، بحيث يظل الطرف العلوي من اللوح ملامساً للجدار، فما سرعة انزلاق الطرف الآخر للوح على الأرض عندما يكون على بعد 3m من جدار المبني ؟



الحل



$$\frac{dy}{dt} = 0.15$$

$$\left.\frac{dx}{dt}\right|_{x=3} = ?$$

$$x^2 + y^2 = 25$$

$$\cancel{2}y\frac{dy}{dt} + \cancel{2}x\frac{dx}{dt} = 0$$

$$(4)(0.15) + (3)(\frac{dx}{dt}) = 0$$

$$0.6 + 3\frac{dx}{dt} = 0$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{-0.6}{3} = -0.2$$

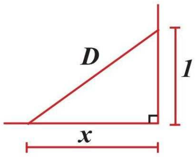
$$x = 3$$

$$y^2 + 3^2 = 5^2$$

$$y = 4$$

قوارب : يسحب جمال قاربه إلى رصيف الاصطفاف باستعمال بكرة سحب ترتفع 1 m عند مقدمه القارب . إذا طوت البكرة حبل السحب بسرعة 1m/s و كان القارب يبعد عن الرصيف مسافة 8m في لحظة ما ، فما سرعة اقتراب القارب من الرصيف عندئذٍ؟

الحل



$$\frac{dD}{dt} = -1$$

$$\left.\frac{dx}{dt}\right|_{x=8} = ?$$

$$D^2 = x^2 + 1$$

$$D = \sqrt{x^2 + 1}$$

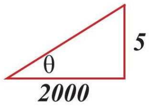
$$\frac{dD}{dt} = \frac{\cancel{2}x\frac{dx}{dt}}{\cancel{2}\sqrt{x^2 + 1}}$$

$$-1 = \frac{(8)\frac{dx}{dt}}{\sqrt{8^2 + 1}} \longrightarrow \frac{dx}{dt} = -\frac{\sqrt{65}}{8}$$

سؤال

رصدت كاميرا مثبته عند مستوى سطح الأرض اطلاق صاروخ رأسياً للأعلى و قد أعطى ارتفاعه بالاقتران s(t) = 50 t² حيث s الموقع بالاقدام t الزمن بالثواني . إذا كانت الكاميرا تبعد 2000 ft عن منصه الاطلاق فجد معدل تغير زاوية ارتفاع الصاروخ بعد 10 s من اطلاقه.

الحل



$$(t) = 50t^2 \longrightarrow S(10) = 50(10)^2 = 5000$$

$$\longrightarrow \frac{ds}{dt} = 100\,t \longrightarrow \frac{ds}{dt} = 100(10) = 1000$$

$$\left.\frac{d\theta}{dt}\right|_{t=10} = ?$$

$$\tan\theta = \frac{s}{2000}$$

$$\sec^2\theta\,\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{2000}\,\frac{ds}{dt}$$

$$\frac{29}{4}\,\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{2000}\,1000$$

$$\longrightarrow \frac{d\theta}{dt} = \frac{2}{29}$$

$$s = 5000$$

$$\tan\theta = \frac{5000}{2000} = \frac{5}{2}$$

$$\sec^2\theta = 1 + \tan^2\theta$$

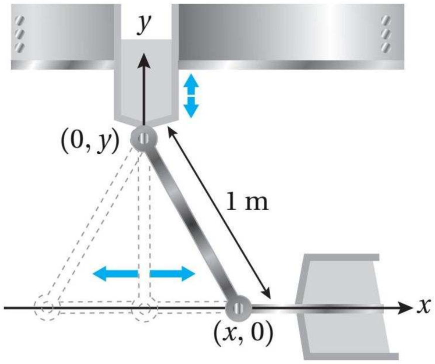
$$\sec^2\theta = 1 + (\frac{5}{2})^2$$

$$\sec^2\theta = \frac{29}{4}$$

سؤال

هندسة ميكانيكية: يبين الشكل المجاور ذراعاً معدنية متحركة طولها 1m ،وإحداثيات نهايتيها (x,0) و(0,y). ويُمثل الاقتران : $x(t)=\frac{1}{2}\sin\frac{\pi t}{6}$ موقع طرف الذراع على المحور x، حيث t الزمن بالثواني :

01 أجد سرعة طرف الذراع الواقع على المحور y عندما يكون الطرف الآخر عند النقطة (1/4 , 0)



الحل

$x=\frac{1}{4}$

$y^2+(\frac{1}{4})^2=1$

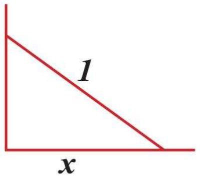
$y=\frac{\sqrt{15}}{4}$

$t=1$

$(\frac{1}{4})(\frac{\pi\sqrt{3}}{24})+(\frac{\sqrt{15}}{4})\frac{dy}{dt}=0$

$\frac{dy}{dt}=\frac{-\pi}{24\sqrt{5}}$

$t=5 \longrightarrow \frac{dy}{dt}=\frac{t\,\pi}{24\sqrt{5}}$



$x=\frac{1}{4}$

$\frac{1}{2}\sin(\frac{\pi}{6}t)=\frac{1}{4}$

$\sin\frac{\pi t}{6}=\frac{1}{2}$

$\frac{\pi t}{6}=\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6},\ldots\ldots$

$t=1\,,\,5\,,\ldots\ldots$

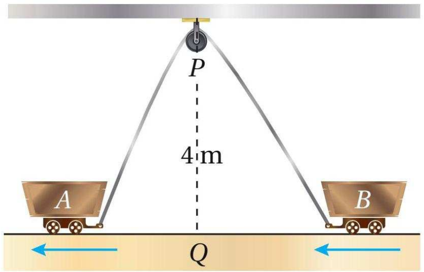
$\frac{dx}{dt}=\frac{1}{2}\cos(\frac{\pi t}{6})\frac{\pi}{6}$

$\frac{\pi\sqrt{3}}{24}$

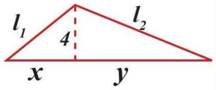
$\frac{-\pi\sqrt{3}}{24}$

سؤال

تبرير : ربطت العربتان B,A بحبل طوله 12 m , و هو يمر بالبكرة p كما فى الشكل المجاور إذا كانت النقطة Q تقع على الأرض بين العربتين أسفل p مباشرة و تبعد عنها مسافة 4m ، و كانت العربة A تتحرك بعيداً عن النقطة Q بسرعة 0.5 m/s فأجد سرعة اقتراب العربة B من النقطة Q في اللحظة التي تكون فيها العربة A على بعد 3m من النقطة Q مبرراً إجابتي.



الحل



$$\frac{dx}{dt} = 0.5$$

$$\left.\frac{dy}{dt}\right|_{x=3} = ?$$

$$l_1 + l_2 = 12$$

$$\sqrt{x^2 + 16} + \sqrt{y^2 + 16} = 12$$

$$\frac{\cancel{2}x\frac{dx}{dt}}{\cancel{2}\sqrt{x^2+16}} + \frac{\cancel{2}y\frac{dy}{dt}}{\cancel{2}\sqrt{y^2+16}} = 0$$

$$\frac{3\ (0.5)}{\sqrt{3^2+16}} + \frac{\sqrt{33}\ \frac{dy}{dt}}{\sqrt{33+16}} = 0$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{-21}{10\sqrt{33}}$$

$$\boxed{x = 3}$$

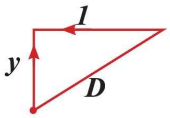
$$\rightarrow \sqrt{3^2 + 16} + \sqrt{y^2 + 16} = 12$$

$$\rightarrow \sqrt{y^2 + 16} = 7$$

$$\rightarrow\ y = \sqrt{33}$$

تتحرك سيارة A في اتجاه الغرب بسرعة 80km/h ، و تتحرك السيارة B في اتجاه الشمال بسرعة 100 km /h ، و هما تتجهان نحو تقاطع مروري . أجد معدل تغير البعد بين السيارتين عندما تكون السيارة A و السيارة B على بعد 0.3 km و 0.4 km (على الترتيب) من التقاطع.

الحل



$$\frac{dx}{dt} = -80$$

سالبة لانها تتناقص

$$\frac{dx}{dt} = -100$$

$$\left.\frac{dD}{dt}\right|_{\substack{x=0.3\\ y=0.4}} = ?$$

$$D = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\frac{dD}{dt} = \frac{2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt}}{2\sqrt{x^2+y^2}}$$

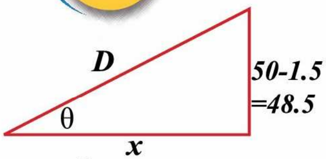
$$= \frac{2(0.3)(-80) + 2\ (0.4)(-100)}{2\sqrt{(0.3)^2 + (0.4)^2}}$$

$$= -128$$

سؤال

أمسك ولد ببكرة خيط طائرة ورقية تحلق على ارتفاع 50 m فوق سطح الأرض ، و تتحرك أفقياً بسرعة 2m/s . أجد معدل تغير الزاوية بين الخيط و المستوى الأفقي عندما يكون طول الخيط 100 m ، علماً بأن ارتفاع يد الولد عن الأرض 1.5 m .

الحل



$$\frac{dx}{dt} = 2$$

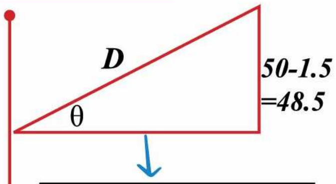
$$\left.\frac{d\theta}{dt}\right|_{D = 100} = ?$$

$$\tan\theta = \frac{48.5}{x}$$

$$\sec^2\theta\,\frac{d\theta}{dt} = \frac{-48.5}{x^2}\,\frac{dx}{dt}$$

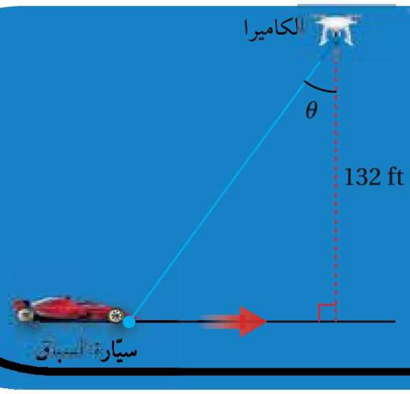
$$\left(\frac{100}{\sqrt{100^2 - (48.5)^2}}\right)^2\frac{d\theta}{dt} = \frac{(-48.5)(2)}{\sqrt{100^2 -(+48.5)^2}}$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{-(48.5)(2)}{(100)^2} = \frac{-97}{10000}$$



$$\sqrt{100^2 - (48.5)^2}$$

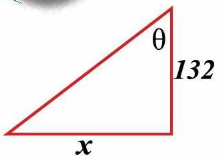
سؤال



سباقات سيارات : ترتفع كاميرا عن الأرض مسافة 132ft،وترصد سيارة تتحرك على مضمار سباق ، وتبلغ سرعتها 264 ft/s كما في الشكل المجاور :

أجد سرعة تغير الزاوية θعندما تكون السيارة أسفل الكاميرا تماماً

الحل



$$\frac{dx}{dt} = -264$$

$$\left.\frac{d\theta}{dt}\right|_{\substack{\theta = 0 \\ x = 0}} = ?$$

$$\tan\theta = \frac{x}{132}$$

$$\sec^2\theta\,\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{132}\,\frac{dx}{dt}$$

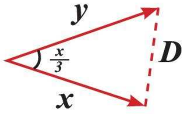
$$\sec^2(0)\,\frac{d\theta}{dt} = \frac{-1}{132}.(-264)$$

$$\frac{d\theta}{dt} = -2$$

سؤال

دراجات نارية : تتحرك درجتان في الوقت نفسه , و من النقطة نفسها , على طريقين مستقيمين , قياس الزاوية بينهما $\frac{\pi}{3}$ rad . إذا كانت سرعة الدراجة الأولى 15 Km/h , وسرعة الدراجة الثانية 20 Km/h ,فأجد سرعة ابتعاد كلّ منهما عن الأخرى عندما يكون بعد الدراجة الأولى و الثانية من نقطة الانطلاق 30 كم & 40 كم (على الترتيب).

الحل



$$\frac{dx}{dt} = 15$$

$$\frac{dy}{dt} = 20$$

$$\left.\frac{dD}{dt}\right|_{\substack{x=30\\ y=40}} = ?$$

قانون جيب التمام

$$D^2 = x^2 + y^2 - 2xy\cos\frac{\pi}{3}$$

$$D = \sqrt{x^2 + y^2 - xy}$$

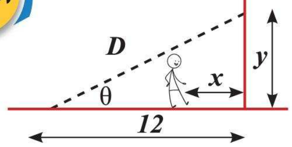
$$\frac{dD}{dt} = \frac{2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt} - (x\frac{dy}{dt} + y\frac{dx}{dt})}{2\sqrt{x^2 + y^2 - xy}}$$

$$\frac{dD}{dt} = \frac{900 + 1600 - (600 + 600)}{2\sqrt{900 + 1600 - 1200}}$$

سؤال

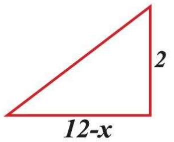
ضوء : مصباح مثبت بالأرض ، و هو يضئ على جدار يبعد عنه مسافة 12m إذا سار رجل طوله 2m من موقع المصباح إلي الجدار بسرعة 1.6 m/s فأجد معدل تغير طول ظله على الجدار عندما يكون على بعد 4 m من الجدار.

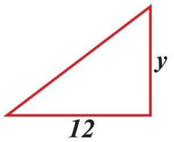
الحل



$$\frac{dx}{dt} = -1.6$$

$$\left.\frac{dy}{dt}\right|_{x=4} = ?$$





$$\frac{y}{2} = \frac{12}{12-x} \longrightarrow y = \frac{24}{12-x}$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{-24\,(-1)}{(12-x)^2}\,\frac{dx}{dt} = \frac{24\,(-1.6)}{(12-4)^2}$$

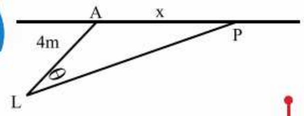
$$= \frac{-38.4}{64}$$

بقعة ضوء

سؤال

يدور مصباح مثبت بالأرض حول نفسه 3 دورات في الدقيقة ، و يبعد مسافة 4 m عن جدار مستقيم كما في الشكل المجاور. أجد سرعة تحرك بقعة ضوء المصباح على الجدار عندما تكون على بعد 8m من أقرب نقطة إلى المصباح على الجدار أثناء حركتها مبتعدة عن هذه النقطة.

الحل



$$x = 4\tan\theta$$

$$x = 4\tan\theta$$

$$8 = 4\tan\theta$$

$$\tan\theta = 2$$

$$\sec^2\theta = 1 + \tan^2\theta$$

$$= 1 + 2^2 = 5$$

$$\frac{dx}{dt} = 4\sec^2 \times \frac{d\theta}{dt}$$

$$\left.\frac{dx}{dt}\right|_{x=8} 4\,(5) \times 6\pi$$

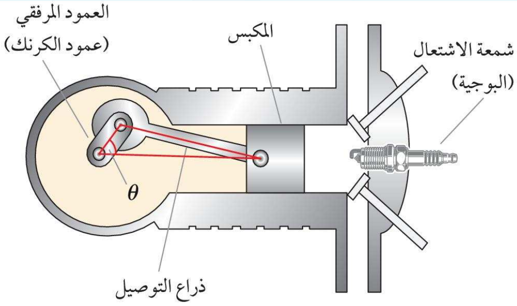
$$= 120\,\pi$$

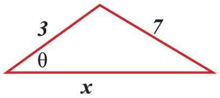
$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{\theta}{t} = \frac{6\,\pi}{1\ min} = 6\pi$$

سؤال

يبين الشكل الآتي محرك سيارة يحتوي على ذراع توصيل طولها 7in ،وهي مثبتة بعمود مرفقي طوله 3in. إذا دار العمود المرفقي عكس اتجاه دوران عقارب الساعة 200 دورة في الدقيقة ، فما سرعة المكبس عندما $\theta = \frac{\pi}{3}$ ؟

الحل





$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{200.2\pi}{1} = 400\,\pi$$

$$\left.\frac{dx}{dt}\right|_{\theta=\frac{\pi}{3}} = ?$$

$$7^2 = 3^2 + x^2 - 2.3\,x\cos\theta$$

$$x^2 - 6x\cos\theta = 40$$

$$2x\frac{dx}{dt} + 6x\sin\theta\,\frac{d\theta}{dt} - 6\cos\theta\,\frac{dx}{dt} = 0$$

$$\theta = \frac{\pi}{3}$$

$$\longrightarrow x^2 - 6x\cos\frac{\pi}{3} = 40$$

$$x^2 - 3x - 40 = 0$$

$$(x-8)(x+5) = 0$$

$$x = 8$$

$$\longrightarrow 2(8)\frac{dx}{dt} + 6(8)\frac{\sqrt{3}}{2}\,400\,\pi - 6\,\frac{1}{2}\,\frac{dx}{dt} = 0$$

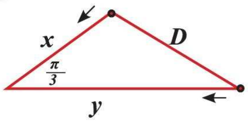
$$13\,\frac{dx}{dt} = -9600\,\pi\sqrt{3} \longrightarrow \boxed{\frac{dx}{dt} = \frac{-9600\,\pi\sqrt{3}}{-13}}$$

سنوات 2004

سؤال

خطان حديديان يميل أحدهما عن الآخر بزاوية قياسها $\frac{\pi}{3}$ ويلتقيان في النقطة c ويسير القطار a على أحدهما بسرعة 80 km /h مقترباً من النقطة c ويسير القطار b على الخط الآخر بسرعة 50 km / h مقترباً من النقطة c .عند الساعة التاسعة صباحاً كان القطاران على بعد 210 km & 180 km على الترتيب من النقطة c جد معدل اقتراب القطارين من بعضهما عند الساعة الحادية عشرة صباحاً.

الحل



$$\frac{dx}{dt} = -80$$

$$\frac{dy}{dt} | = -50$$

$$\frac{dD}{dt} |_{t = 0} = ?$$

$$D = \sqrt{x^2 + y^2 - 2xy \cos \frac{\pi}{3}}$$

$$\frac{dD}{dt} = \frac{2x \frac{dx}{dt} + 2y \frac{dy}{dt} - x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt}}{2\sqrt{x^2 + y^2 - xy}}$$

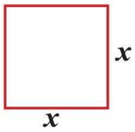
$$\left(\begin{array}{l} x = x_0 + \frac{dx}{dt} t = 210 - 80 (2) = \boxed{50} \\ y = y_0 + \frac{dy}{dt} t = 180 - 50 (2) = \boxed{80} \end{array} \right)$$

$$\frac{dD}{dt} = ... = \frac{-11500}{140}$$

سؤال

صفيحة معدنية مربعة الشكل تتمدد محافظة على شكلها بحيث تزداد مساحتها بمعدل 12 cm²/s جد معدل تغير محيطها مع الزمن عندما يصبح طول الضلع 3cm.

الحل



$$\frac{dA}{dt} = 12$$

$$\frac{dP}{dt} |_{x = 3} = ?$$

$$A = x^2$$

$$\frac{dA}{dt} = 2x \frac{dx}{dt}$$

$$12 = 2 (3) \frac{dx}{dt}$$

$$\rightarrow \frac{dx}{dt} = 2$$

$$p = 4x$$

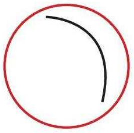
$$\frac{dp}{dt} = 4 \frac{dx}{dt}$$

$$\frac{dp}{dt} = 4 (2) = 8$$

سؤال

يتم نفخ بالون كروي بمعدل 16 cm³/s جد معدل تغير مساحته عندما يصبح نصف قطره 2cm.

الحل



$$\frac{dv}{dt} = 16$$

$$\left.\frac{dA}{dt}\right|_{r=2} = ?$$

$$v = \frac{4\pi}{3} r^3$$

$$\frac{dv}{dt} = 4\pi r^2 \frac{dr}{dt}$$

$$16 = 4\pi(2)^2 \frac{dr}{dt}$$

$$\rightarrow \frac{dr}{dt} = \frac{1}{\pi}$$

$$A = 4\pi r^2$$

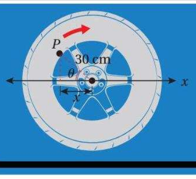
$$\frac{dA}{dt} = 8\pi r \frac{dr}{dt}$$

$$= 8\pi (2) \frac{1}{\pi}$$

$$= 16$$

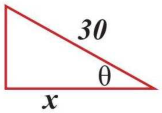
سؤال

سيارات : عجلة سيارة طول نصف قطرها الداخلي 30cm، وهي تدور بمعدل 10 دورات في الثانية .رسُمت النقطة P على حافة العجلة كما في الشكل المجاور :



الحل

- ✓ أجد $\frac{dx}{dt}$ بدلالة θ.
- ✓ أجد $\frac{dx}{dt}$ عندما تكون $\theta = 45^0$.



$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{10.2\,\pi}{1} = 20\pi$$

$$\left.\frac{dD}{dt}\right|_{\theta = 45} = ?$$

$$\frac{x}{30} = \cos\theta$$

$$x = 30\cos\theta$$

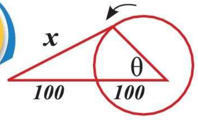
① $$\frac{dx}{dt} = -30\sin\theta\,\frac{d\theta}{dt} = -30\sin\theta\; 20\,\pi$$

② $$\frac{dx}{dt} = -30\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)20\,\pi$$

$$= -\frac{600\pi}{\sqrt{2}}$$

يركض عداء في مضمار دائري ، طول نصف قطره 100m ، بسرعة ثابتة مقدارها 7m/s ، ويقف عداء آخر على بعد 200m من مركز مضمار الركض . أجد معدل تغير المسافة بين العداءين عندما تكون المسافة بينهما 200m . تنبيه: أجد جميع الحلول الممكنة.

الحل



$$\frac{dl}{dt} = -7$$

$$\left.\frac{dx}{dt}\right|_{x = 200} = ?$$

$$l = r\,\theta$$

$$l = 100\,\theta$$

$$\frac{dl}{dt} = 100\,\frac{d\theta}{dt}$$

$$-7 = 100\,\frac{d\theta}{dt}$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{-7}{100}$$

$$x^2 = (200)^2 + (100)^2 - 2(200)(100)\cos\theta$$

$$2x\,\frac{dx}{dt} = +40000\,\sin\theta\,\frac{d\theta}{dt}$$

$$2(200)\,\frac{dx}{dt} = 40000\,(\quad)\frac{-7}{100}$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{-7\sqrt{15}}{4}$$

$$x^2 = ...$$

$$200^2 = ...$$

$$\cos\theta = \frac{1}{4}$$

$$\sin\theta = \frac{\pm\sqrt{15}}{4}$$

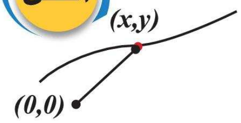
$$\sin\theta = \frac{\sqrt{15}}{4}$$

حالة 2

$$\frac{dl}{dt} = +7 \longrightarrow \frac{dx}{dt} = \frac{+7\sqrt{15}}{4}$$

يتحرك جسيم على منحنى الاقتران $f(x) = 2\sin\frac{x\pi}{2}$ وعند مروره بالنقطة $(\frac{1}{3}, 1)$ فإن الاحداثي x لموقعه يزداد بمعدل $\sqrt{10}$ وحدة طول لكل ثانية ، أجد معدل تغير المسافة بين الجسيم ونقطة الأصل في هذه اللحظة.

الحل



$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{10}$$

$$\left.\frac{ds}{dt}\right|_{\substack{x = \frac{1}{3} \\ y = 1}} = ?$$

$$s = \sqrt{(y_2 - y_1)^2 + (x_2 - x_1)^2}$$

$$s = \sqrt{(y - 0)^2 + (x - 0)^2}$$

$$s = \sqrt{4\sin^2(\frac{\pi x}{2}) + x^2}$$

$$\frac{ds}{dt} = \frac{8\sin(\frac{\pi x}{2})\cos(\frac{\pi x}{2}).\ \frac{\pi}{2}\ \frac{dx}{dt} + 2x\,\frac{dx}{dt}}{2\sqrt{4\sin^2(\frac{\pi x}{2}) + x^2}}$$

$$\left.\frac{ds}{dt}\right|_{x = \frac{1}{3}} = \frac{8 . \frac{1}{2} . \frac{\sqrt{3}}{2} . \frac{\pi}{2} . \sqrt{10} + 2\,\frac{1}{3}\,\sqrt{10}}{2\sqrt{4(\frac{1}{3})^2 + (\frac{1}{3})^2}}$$

$$= \frac{\sqrt{30}\,\pi + \sqrt{10}\,\frac{2}{3}}{2\sqrt{\frac{10}{9}}} = \frac{3(\sqrt{30}\,\pi + \sqrt{10})\,\frac{1}{3}}{2\,\sqrt{10}}$$

$$= \frac{3}{2}\left(\frac{\sqrt{30}\,\pi}{\sqrt{10}} + \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{10}}\,\frac{2}{3}\right) = \frac{3}{2}\,(\sqrt{3}\,\pi + \frac{2}{3})$$

$$= 1 + \frac{3\sqrt{3}\,\pi}{2}$$

سؤال

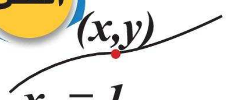
بدأت نقطة الحركة من النقطة (1,2) على منحنى العلاقة $x^2 + y^2 - 5x + 3y - 6 = 0$ بحيث يزداد الاحداثي x بمعدل 3 cm / s جد معدل تغير الاحداثي y بعد ثانية من الانطلاق علماً أن $y > 0$

الحل

x_0 السرعة المسافة

$$x = 1 + 3\ (1)$$
$$= 4$$
$$4^2 + y^2 - 5(4) + 3y - 6 = 0$$
$$y^2 + 3y - 10 = 0$$
$$(y-2)(y+5) = 0$$
$$y = 2 \qquad \underset{y>0}{y = -5}$$

$$x^2 + y^2 - 5x + 3y - 6 = 0$$
$$2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt} - 5\frac{dx}{dt} + 3\frac{dy}{dt} = 0$$
$$2(4)(3) + 2(2)\frac{dy}{dt} - 5(3) + 3\frac{dy}{dt} = 0$$
$$7\frac{dy}{dt} + 9 = 0 \longrightarrow \frac{dy}{dt} = \frac{-9}{7}$$



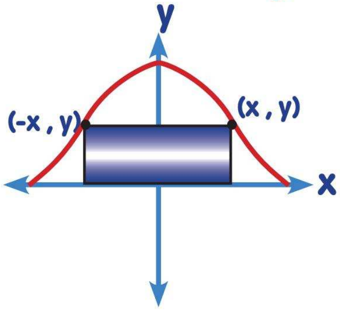
$$x_0 = 1$$
$$y_0 = 2$$
$$\frac{dx}{dt} = 3$$
$$\left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=1} = ?$$

سؤال

يبين الشكل المجاور مستطيلا مرسوماً داخل منحنى الاقتران: $f(x) = e^{-x2/2}$ إذا كان X يتغير مع الزمن ،مُغيرا معه موضع المستطيل، فأُجيب عن السؤالين الآتيين تباعاً :

- ✓ أجد مساحة المستطيل بدلالة x.
- ✓ أجد مُعدل تغيُّر مساحة المستطيل عندما X =4، وعندما $\frac{dx}{dt} = 4$

الحل



① $$A = 2xy = 2x\,e^{\frac{-x^2}{2}}$$

② $$\frac{dA}{dt} = 2x\,e^{\frac{-x^2}{2}}\left(-x\frac{dx}{dt}\right) + e^{\frac{-x^2}{2}}\left(2\frac{dx}{dt}\right)$$
$$= 2(4)\,e^{-8}\,(-4(4) + e^{-8}\,(2(4))$$
$$= -128e^{-8} + 8\,e^{-8}$$
$$= -120\,e^{-8}$$

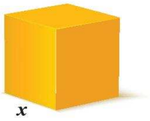
سؤال

مكعب طول ضلعه 10cm بداء يتمدد فزاد طول ضلعه بمعدل 6 cm/s و ظل محافظاً على شكله :

1- جد معدل تغير حجم المكعب بعد 4 s من بدأ تقعره.

2- جد معدل تغير مسافة سطح المكعب بعد 6s.

الحل



$x_0 = 10$

$$\frac{dx}{dt} = 6$$

$$\frac{dv}{dt}\Big|_{t=4} = ?$$

$$\frac{dA}{dt}\Big|_{t=6} = ?$$

$$v = x^3 \longrightarrow \frac{dv}{dt} = 3x^2\frac{dx}{dt}$$

$$x = 10 + 6(4) = 34 \longrightarrow \frac{dv}{dt}\ 3\ (34)^2\ 6$$

$$A = 6\ x^2 \longrightarrow \frac{dA}{dt}\ 12\ x\ \frac{dx}{dt}$$

$$x = 10 + 6(6) = 46 \longrightarrow \frac{dA}{dt}\ 12\ (46)(6)$$

سؤال

اسطوانة يزداد ارتفاعها بمعدل 1cm/s ، و يتناقص نصف قطرها بمعدل 2cm/s ، جد معدل تغير حجمها فى اللحظة التى يصبح فيها ارتقاعها 10cm و نصف قطرها 3cm.

الحل

$$\frac{dh}{dt} = 1$$

$$\frac{dr}{dt} = -2$$

$$\frac{dv}{dt}\Big|_{\substack{h=10\\ r=3}} = ?$$

$$v = \pi\ r^2\ h$$

$$\frac{dv}{dt} = \pi\ r^2 \frac{dh}{dt} + h\ 2\pi r\frac{dr}{dt}$$

$$= \pi\ (3)^2\ (1) + 10\ (2\pi)\ (3)\ (-2)$$

$$= 9\ \pi - 120\ \pi = -111\ \pi$$

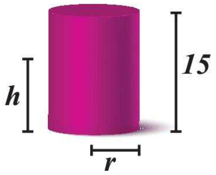
سؤال

خزان وقود اسطواني الشكل ارتفاعه 15m وقطر قاعدته 2m . ملئ الخزان بالوقود بمعدل 500L/min

1- جد معدل ارتفاع الوقود في الخزان في أي لحظة.

2- جد معدل تغير المساحة الجانبية للوقود عند أي لحظة.

الحل



$$\frac{dV}{dt} = 500\ l/min$$

$$\frac{dV}{dt} = \frac{500}{1000}\ m^3/min$$

$$= 0.5\ m^3/min$$

$$\frac{dh}{dt} = ?$$

$$\frac{dA}{dt} = ?$$

$$v = \pi r^2 h$$

$$v = \pi (1)^2 h$$

$$v = \pi h$$

$$\frac{dv}{dt} = \pi \frac{dh}{dt} \rightarrow 0.5 = \pi \frac{dh}{dt}$$

$$\boxed{\frac{dh}{dt} = \frac{1}{2\pi}}$$

$$A = 2\pi r h = 2\pi(1)h = 2\pi h$$

$$\frac{dA}{dt} = 2\pi \frac{dh}{dt} = 2\pi \frac{1}{2\pi}$$

$$\boxed{\frac{dA}{dt} = 1}$$

سؤال

يسقط الرمل من حزام ناقل بمعدل 12 m3/min على قمة كومة مخروطية الشكل . إذا كان ارتفاع الكومة يساوي دائما ثلاثة أضعاف طول نصف قطرها فجد معدل تغير مساحة سطح الرمل عندما يصبح نصف قطر قاعدتها 2m.

الحل

$$h = 3r$$

$$\frac{dv}{dt} = 12$$

$$\left.\frac{dA}{dt}\right|_{r=2} = ?$$

$$v = \frac{\pi}{3} r^2 h$$

$$= \frac{\pi}{3} r^2 3r$$

$$v = \pi r^3$$

$$\frac{dv}{dt} = 3\pi (2)^2 \frac{dr}{dt}$$

$$12 = 3\pi (2)^2 \frac{dr}{dt}$$

$$\rightarrow \frac{dr}{dt} = \frac{1}{\pi}$$

$$A = \pi r \sqrt{r^2 + h^2}$$

$$A = \pi r \sqrt{r^2 + (3r)^2}$$

$$A = \sqrt{10}\,\pi r^2$$

$$\frac{dA}{dt} = 2\sqrt{10}\,\pi r \frac{dr}{dt}$$

$$\frac{dA}{dt} = 2\sqrt{10}\,\pi (2) \frac{1}{\pi}$$

$$\frac{dA}{dt} = 4\sqrt{10}$$

تنفخ ماجدة بالوناً على شكل كرة ، فيزداد حجمه بمعدل
$80 cm^3/s$ بحيث يبقى محافظا على شكله . ما معدل زيادة طول
نصف قطر هذا البالون عندما يكون طول قطره يساوي 12

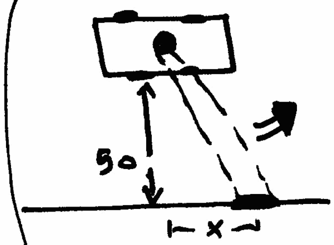
a) $\frac{5}{9\pi}$ b) $\frac{5}{36\pi}$ c) $\frac{5}{9}$ d) $\frac{5\pi}{9}$

$$V = \frac{4\pi}{3} r^3 \Longrightarrow \frac{dV}{dt} = 4\pi r^2 \frac{dr}{dt}$$

(القطر $= 12$
$r = 6$)

$$80 = 4\pi(6)^2 \frac{dr}{dt}$$

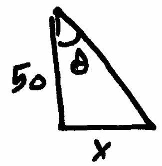
$$\frac{dr}{dt} = \frac{80}{4\pi \cdot 36} = \frac{20}{36\pi} = \frac{5}{9\pi} \Longrightarrow \boxed{a}$$



تقف سيارة اسعاف على بعد 50ft من حائط مستقيم . إذا كان الضوء الدوار في أعلى السيارة يدور 30 دورة في الدقيقة . فما سرعة

تحرك بقعة الضوء على الحائط عند نقطة تبعد مسافة 20ft عن اقرب نقطة لسيارة الاسعاف

الحل



$$\tan\theta = \frac{x}{50}$$

$$\sec^2\theta \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{50} \frac{dx}{dt}$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{30 \cdot 2\pi}{1} = 60\pi$$

$x = 20 \Longrightarrow \tan\theta = \frac{20}{50} = \frac{2}{5}$

$\sec^2\theta = 1 + \tan^2\theta = 1 + (\frac{2}{5})^2 = \frac{29}{25}$

$$\left.\frac{dx}{dt}\right|_{x=20} = ?$$

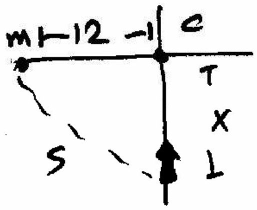
$$\frac{29}{25} 60\pi = \frac{1}{50} \frac{dx}{dt}$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{50 \cdot 60\pi \cdot 29}{25} = 3480\pi$$

2023
جيل 2005

l و m طريقان مستقيمان متعامدان في النقطة C . تقع محطة وقود على الطريق m وتبعد 12 km عن نقطة التقاطع C . إذا تحركت سيارة على الطريق l بسرعة 26 km/h في اتجاه نقطة التقاطع C ، فما معدّل تغيّر المسافة بين السيارة ومحطة الوقود عندما تكون السيارة على بعد 5 km من نقطة التقاطع؟

a) -4 km/h　　b) -10 km/h　　c) 10 km/h　　d) 4 km/h



$\frac{dx}{dt} = -26$

$\left.\frac{ds}{dt}\right|_{x=5} = ?$

$S = \sqrt{x^2 + 12^2}$

$\frac{ds}{dt} = \frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{x^2+144}} \frac{dx}{dt}$

$\left.\frac{ds}{dt}\right|_{x=5} = \frac{5}{\sqrt{25+144}} \cdot -26$

$= -10 \Longrightarrow \boxed{b}$

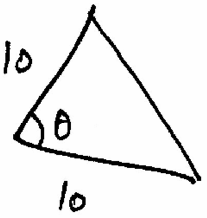
2023
جيل 2005

مثلث متطابق الضلعين طول كل من ضلعيه المتطابقين 10 cm، وقياس الزاوية بينهما θ
إذا تغيّرت θ بمعدّل $\frac{\pi}{60}$ rad/min ، فإنّ معدّل تغيّر مساحة المثلث عندما $\theta = \frac{\pi}{3}$ هو:

a) $\frac{5\pi}{6}$ cm^2/min　　b) $\frac{\pi}{6}$ cm^2/min

c) $\frac{5\pi}{12}$ cm^2/min　　d) $\frac{\pi}{12}$ cm^2/min

الحل



$\frac{d\theta}{dt} = \frac{\pi}{60}$

$\left.\frac{dA}{dt}\right|_{\theta=\frac{\pi}{3}} =$

$A = \frac{1}{2}(10)(10)\sin\theta$

$A = 50\sin\theta$

$\frac{dA}{dt} = 50\cos\theta \cdot \frac{d\theta}{dt}$

$= 50\cos\frac{\pi}{3} \cdot \frac{\pi}{60} = \frac{5\pi}{12} \quad \boxed{C}$

القصوى و التقعر

2019

5 علامات

إذا كان $f(x) = 4x^2 - \frac{1}{2}x^4$ ، $x \in [-3, 3]$ ، جد

① فترات التزايد وفترات التناقص للاقتران f

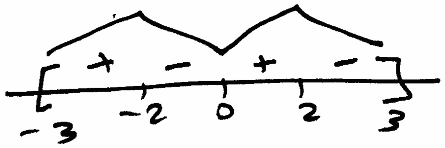
② القيم القصوى المحلية والمطلقة للاقتران f مبينا نوعها

③ الفترة (الفترات) التي يكون فيها منحنى الاقتران f مقعراً للاعلى

④ نقط الانعطاف لمنحنى الاقتران f (ان وجدت)

① $f'(x) = 8x - 2x^3 \xrightarrow{f'=0} 2x(4 - x^2) = 0 \Rightarrow x = 0, -2, 2$

$\xrightarrow{f' \nexists}$ x= [illegible]



تزايد $(-3, -2)$ $(0, 2)$

تناقص $(-2, 0)$ $(2, 3)$

②

$(f(-3) = -9 \quad)$

عظمى محلية عند $x = -2$ و هي $f(-2) = 8$

صغرى محلية عند $x = 0$ وهي $f(0) = 0$

عظمى محلية عند $x = 2$ وهي $f(2) = 8$

$(f(3) = -\frac{9}{2} \quad)$

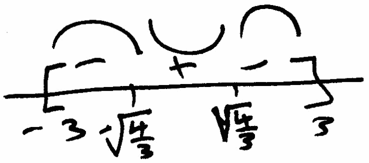
عظمى مطلقة عند $x = 2$، $x = -2$ و هي $f(2) = 8$، $f(-2) = 8$

صغرى مطلقة عند $x = 3$، $x = -3$ و هي $f(3) = -\frac{9}{2}$، $f(-3) = -\frac{9}{2}$

③

$\boxed{f''(x) = 8 - 6x^2} \xrightarrow{f''=0} 8 - 6x^2 = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{4}{3}}$

$\xrightarrow{f'' \nexists}$ x= [illegible]



مقعر للاعلى $\left(-\sqrt{\frac{4}{3}}, \sqrt{\frac{4}{3}}\right)$

④ نقطة انعطاف $\left(\sqrt{\frac{4}{3}}, f\sqrt{\frac{4}{3}}\right)$ & $\left(-\sqrt{\frac{4}{3}}, f\left(-\sqrt{\frac{4}{3}}\right)\right)$

$= \left(\sqrt{\frac{4}{3}}, \frac{40}{9}\right)$ & $\left(-\frac{\sqrt{4}}{3}, \frac{40}{9}\right)$

(2022) إذا كان $f(x)=\frac{x}{x^2+4}$ ، $x\in R$ ، فجد كلا مما يلي:

① فترات التزايد وفترات التناقص للاقتران f

② القيم القصوى المحلية للاقتران f (إن وجدت) مبيناً نوعها

③ فترات التقعر للأعلى للاقتران f ، إذا علمت أنه

$$f''(x)=\frac{2x^3-24x}{(x^2+4)^3}$$

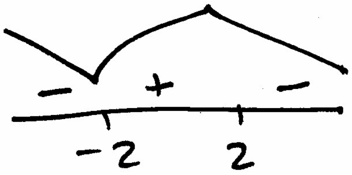
الحل المجال R ($x^2+4=0 \Rightarrow x^2=-4 \Rightarrow x=\{\}$)
لا أصفار مقام

①

$$f'(x)=\frac{(x^2+4)(1)-x(2x)}{(x^2+4)^2}=\frac{4-x^2}{(x^2+4)^2}$$

$f'(x)=0 \Rightarrow 4-x^2=0 \Rightarrow x=\pm 2$

$f'(x)$ م غ $\Rightarrow x^2+4=0 \Rightarrow x=\{\}$



تزايد $(-2,2)$

تناقص $(-\infty,-2)$ و $(2,\infty)$

②

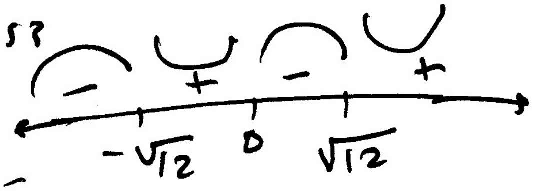
صغرى محلية عند $x=-2$ وهي $f(-2)=\frac{-2}{8}$

عظمى محلية عند $x=2$ وهي $f(2)=\frac{2}{8}$

③ $f''(x)=\frac{2x^3-24x}{(x^2+4)^3} \xrightarrow{f''=0} 2x^3-24x=0$

$\Rightarrow x=0,\pm\sqrt{12}$

f'' م غ $\rightarrow x=\{\}$



مقعر للأعلى $(-\sqrt{12},0)$ ، $(\sqrt{12},\infty)$

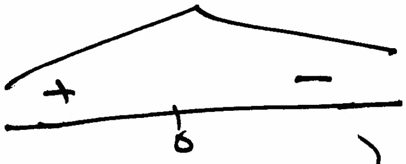
إذا كانت $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^{x^4-1}$ ، فإن الاقتران f(x) يكون متزايد على الفترة

a) $(\frac{1}{3}, \infty)$ b) $(-\infty, \infty)$ c) $(0, \infty)$ d) $(-\infty, 0)$

$$f'(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^{x^4-1} \cdot 4x^3 \cdot \ln\frac{1}{3}$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{x^4-1} = 0 \qquad x = \nexists$$

$$4x^3 = 0 \qquad x = 0$$



استخدم الآلة الحاسبة

$(-\infty, 0)$ $\boxed{d}$

إذا كان $f(x) = \frac{x-1}{\sqrt[3]{x^2}}$ ، فإن قيمة x التي يكون عندها للاقتران f(x) قيمة عظمى محلية هي

a) −2 b) 1 c) $\sqrt[3]{2}$ d) 2

(امتحان IR-٤٠٣)

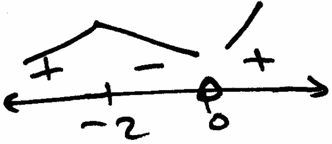
$$f(x) = \frac{x}{x^{2/3}} - \frac{1}{x^{2/3}}$$

$$= x^{+1/3} - x^{-2/3}$$

$$f'(x) = +\frac{1}{3}x^{-2/3} + \frac{2}{3}x^{-5/3} \longrightarrow \frac{1}{3x^{2/3}} + \frac{2}{3x^{5/3}}$$

$$= \frac{+x+2}{3x^{5/3}} \qquad \xrightarrow{=0} \quad x = -2 \qquad \longrightarrow \quad x = 0$$

$x = -2$ عند $\Longleftarrow$



$\boxed{a}$

س3

إذا كان $x \in [0, 2\pi]$; $f(x) = \sin^2 x + 2\sin x$ ، فجد

① القيم القصوى المحلية للاقتران $f(x)$ مبيناً نوعها

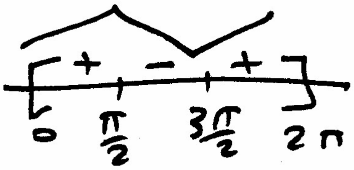
② فترات التقعر للاعلى والاسفل للاقتران $f(x)$

① $f'(x) = 2\sin x \cos x + 2\cos x$

$f'(x) = 0 \Longrightarrow 2\cos x(\sin x + 1) = 0$

$\cos x = 0 \Longrightarrow x = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$

$\sin x = -1 \longrightarrow x = \frac{3\pi}{2}$



~~صغرى~~ عظمى محلية عند $x = \frac{\pi}{2}$ وهي $f(\frac{\pi}{2}) = 3$

صغرى محلية عند $x = 3\frac{\pi}{2}$ وهي $f(\frac{3\pi}{2}) = -1$

② $f''(x) = 2\sin x(-\sin x) + \cos x(2\cos x) - 2\sin x$

$= -2\sin^2 x + 2\cos^2 x - 2\sin x$

$= -2\sin^2 x + 2(1 - \sin^2 x) - 2\sin x$

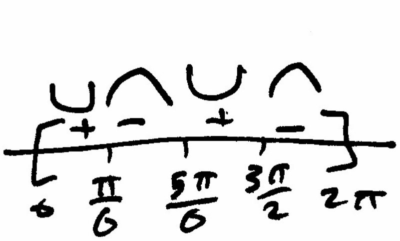
$\boxed{f''(x) = 2 - 4\sin^2 x - 2\sin x}$

$= 0 \Longrightarrow 2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0$

$(2\sin x - 1)(\sin x + 1) = 0$

$\sin x = -1 \Longrightarrow x = 3\frac{\pi}{2}$

$\sin x = \frac{1}{2} \Longrightarrow x = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$



مقعر للاعلى $(0, \frac{\pi}{6})$ ، $(\frac{5\pi}{6}, 3\frac{\pi}{2})$

مقعر للاسفل $(\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6})$ ، $(\frac{3\pi}{2}, 2\pi)$

إذا كان $f(x) = \ln(x^2+1)$ ، فإن منحنى الاقتران $f(x)$ يكون مقعراً للأعلى على الفترة

a) $(-\infty,\infty)$ b) $(-\infty,-1) \cup (1,\infty)$ c) $(-1,1)$ d) $(-\infty,1)$

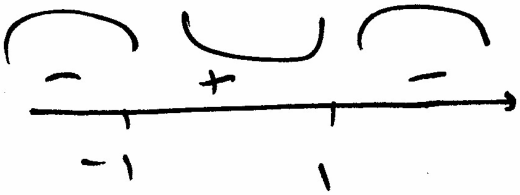
الحل $f'(x) = \frac{2x}{x^2+1}$

إشارة $x^2+1=0 \Rightarrow x=؟؟$

$\overline{+\ +\ +} \Rightarrow R$

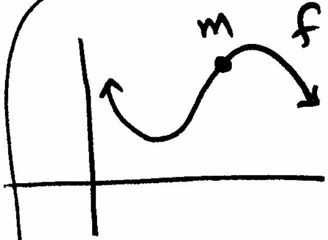
$$f''(x) = \frac{(x^2+1)(2)-2x(2x)}{(x^2+1)^2} = \frac{2-2x^2}{(x^2+1)^2} \xrightarrow{f''=0} x=\pm 1$$

$\longrightarrow x=؟؟$



مقعر للأعلى ⟸ $(-1,1)$ ⟸ c

$\boxed{c}$



معتمداً الشكل المجاور الذي يمثل منحنى كثير الحدود $f(x)$ المعرف على مجموعة الأعداد الحقيقية R ، أي العبارات الآتية صحيحة عند النقطة m

a) $f'(x)>0$, $f''(x)>0$ b) $f'(x)<0$, $f''(x)>0$

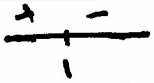
c) $f(x)>0$, $f''(x)<0$ d) $f'(x)<0$, $f''(x)<0$

متزايد $\longrightarrow f'>0$

مقعر للأسفل $\longrightarrow f''<0$ $\Longrightarrow \boxed{c}$

الاقتران $f(x) = x\sqrt{1-x}$ متناقص على الفترة

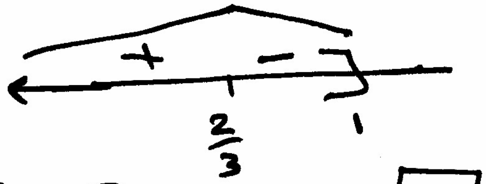
a) $(-\infty, \frac{2}{3})$ b) $(\frac{2}{3}, \infty)$ c) $(\frac{2}{3}, 1)$ d) $(1, \infty)$

المجال $1-x \geq 0 \Rightarrow$  $\Rightarrow (-\infty, 1]$

$$f'(x) = x \cdot \frac{-1}{2\sqrt{1-x}} + \sqrt{1-x} \cdot 1 = \frac{-x}{2\sqrt{1-x}} + \sqrt{1-x} \cdot \frac{2\sqrt{1-x}}{2\sqrt{1-x}}$$

$$f'(x) = \frac{-x + 2(1-x)}{2\sqrt{1-x}} = \frac{-3x+2}{2\sqrt{1-x}} \xrightarrow{f'=0} x = \frac{2}{3}$$

$$\longrightarrow x = 1$$



متناقص $(\frac{2}{3}, 1) \Longrightarrow \boxed{c}$

تذكر احسب المجال في حالة ① النسبي $R - \{$أصفار المقام$\}$

② $\sqrt{}$ زوجي → ما داخله ≥ 0

③ $\ln(\quad)$ → ما داخله > 0

(لكن إذا أعطانا السؤال المجال فلا تحسبه، مثلاً

$f(x) = \frac{\ln x}{x^2}, [\frac{1}{2}, 4], \ldots$)

تذكر : اذا طلب السؤال القيم القصوى المطلقة فقط، فطريقة الكتاب لا تشترط البحث في الاشارة، فقط قارن مباشرة بين الأطراف والحرجات، اكبر قيمة تكون عظمى مطلقة واصغر قيمة تكون صغرى مطلقة

جد القيم القصوى المطلقة للاقتران

$$f(x) = 2\sin x - \cos 2x, [0, 2\pi]$$

$$f(x) = 2\sin x - \cos 2x$$

$$f'(x) = 2\cos x + 2\sin 2x$$

$$2\cos x + 2\sin 2x = 0$$

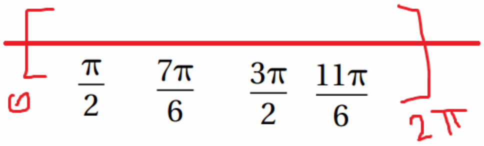
$$2\cos x + 4\sin x\cos x = 0$$

$$2\cos x\,(1 + 2\sin x) = 0$$

$2\cos x = 0$ or $1 + 2\sin x = 0$

$\cos x = 0$ or $\sin x = -\frac{1}{2}$

$x = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$ or $x = \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$



$f(0) = -1$

$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 3$

$f\left(\frac{7\pi}{6}\right) = -\frac{3}{2}$

$f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -1$

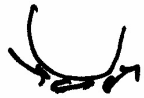
$f\left(\frac{11\pi}{6}\right) = -\frac{3}{2}$

$f(2\pi) = -1$

القيمة العظمى المُطلَقة للاقتران f في الفترة $[0, 2\pi]$ هي: $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 3$

والقيمة الصغرى المُطلَقة له هي: $f\left(\frac{11\pi}{6}\right) = f\left(\frac{7\pi}{6}\right) = -\frac{3}{2}$.

مصطلحات مشهورة :

- مماسات f تحته $\Longleftarrow$  $\Leftarrow$ مقعر للاعلى

مماسات f فوقه $\Longleftarrow$  $\Longleftarrow$ مقعر للاسفل

f فوق مماساته $\Longleftarrow$  $\Longleftarrow$ مقعر للاعلى

- f' متزايد $\Longleftarrow$ f مقعر للاعلى
  f' متناقص $\Longleftarrow$ f مقعر للاسفل

(ميل مماس f متزايد ⟸ مقعر للاعلى
ميل مماس f متناقص ⟸ مقعر للاسفل)

- c نقطة داخلية و $f(c) > f(x)$ لجميع قيم x في فترة مفتوحة تحوي c $\Longleftarrow$  $\Longleftarrow$ عظمى محلية

- = = $f(c) < f(x)$ = $\Longleftarrow$  صغرى محلية

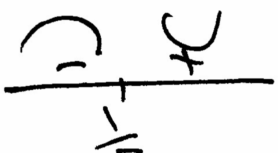
- $f(c) \geq f(x)$ لجميع قيم x في المجال $\Leftarrow$ عظمى مطلقة
  $f(c) \leq f(x)$ = = = = $\Longleftarrow$ صغرى مطلقة

مثال إذا كان $f(x)=x^3-x^2$ ، فإن الفترة التي يكون فيها الاقتران f تحت جميع مماساته هي

a) $(-\infty,\frac{1}{3})$ b) $(\frac{1}{3},\infty)$ c) $(0,\frac{2}{3})$ d) $(0,1)$

الحل $f'(x) = 3x^2-2x \Longrightarrow f''(x)=6x-2=0$

$x=\frac{1}{3}$



 $\Longrightarrow$ مقعر للاسفل $\Longrightarrow (-\infty,\frac{1}{3}) \Longrightarrow \boxed{a}$

2023

إذا كان منحنى الاقتران $f(x)=x^3-ax^2+bx+2$ ، $x\in R$ نقطة انعطاف عند النقطة (2,4) ، فإن قيمة كل من الثابتين a ، b على الترتيب

a) 3 ، 2 b) 9 ، 6 1 ، 4 d) 5 ، 6

الحل

$f'(x) = 3x^2 - 2ax + b$

$f''(x) = 6x - 2a \Longrightarrow f''(2) = 6(2) - 2a = 0 \Rightarrow \boxed{a=6}$

$f(2) = 4 \Longrightarrow (2)^3 - a(2)^2 + b(2) + 2 = 4$

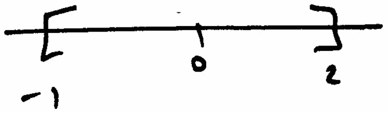
$8 - 24 + 2b + 2 = 4 \longrightarrow \boxed{b=9} \Rightarrow \boxed{b}$

إذا كان $f(x) = x^2+1$ ، حيث $x\in[-1,2]$ ،

فإن مدى هذا الاقتران هو

a) [2,5] b) [0,5] c) [0,1] d) [1,5]

$f'(x) = 2x = 0$



$f(-1) = 2$

$f(0) = 1$ → صغرى مطلقة

$f(2) = 5$ → عظمى مطلقة

المدى $[1, 5] \longrightarrow \boxed{d}$

صغرى مطلقة ، عظمى مطلقة

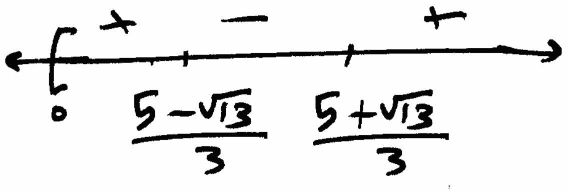
يمثل الاقتران $s(t) = t^3 - 5t^2 + 4t$, $t \geq 0$ موقع جسم يتحرك في مسار مستقيم، حيث s الموقع بالأمتار، t الزمن بالثواني

① ما الفترات الزمنية التي يتحرك فيها الجسم في الاتجاه الموجب والسالب؟

② ما الفترات التي تتزايد فيها سرعة الجسم المتجهة؟ وما الفترات التي تتناقص فيها سرعة الجسم المتجهة؟

① $\boxed{V(t) = 3t^2 - 10t + 4} = 0$

$$t = \frac{5 \pm \sqrt{13}}{3}$$

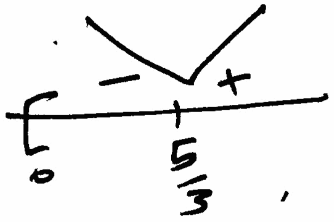


الاتجاه الموجب $\left(0, \frac{5-\sqrt{13}}{3}\right)$

$\left(\frac{5+\sqrt{13}}{3}, \infty\right)$

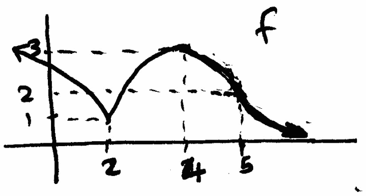
الاتجاه السالب $\left(\frac{5-\sqrt{13}}{3}, \frac{5+\sqrt{13}}{3}\right)$

$\boxed{V'(t) = 6t - 10} = 0 \quad t = \frac{5}{3}$



السرعة تتزايد $\left(\frac{5}{3}, \infty\right)$

تتناقص $\left(0, \frac{5}{3}\right)$



بالاعتماد على الشكل المجاور الذي
يمثل منحنى الاقتران f ،
فإن

① للاقتران f قيمة صغرى عند x تساوي ---
② للاقتران f قيمة صغرى تساوي ---
③ نقطة الانعطاف f هي ---
④ مماس f أفقي عند x تساوي ---
⑤ f غير قابل للاشتقاق عند x تساوي ---
⑥ فترة التزايد f هي ---
⑦ فترة التقعر f للأعلى هي ---
⑧ أي مما يلي صحيح:

a) $f'(3) \cdot f''(3) > 0$ b) $f'(3) \cdot f''(3) < 0$
c) $f'(3) \cdot f''(3) = 0$ d) $f'(3) \cdot f''(3) \geq 0$

الحل

الحل

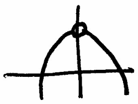
① صغرى عند x تساوي $\boxed{2}$
② صغرى تساوي $\boxed{1} = f(2)$
③ انعطاف $\boxed{(2 و 5)}$
④ مماس أفقي → $x = 4$
⑤ غير قابل عند $x = 2$ (رأس حاد)

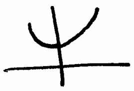
تنبيه:
عند $x=5$ مماس مائل
قابل ⇐ وليس رأسي

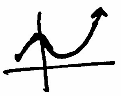
⑥ تزايد $(2, 4)$
⑦ تقعر للأعلى $(5, \infty)$
⑧ موجب $f'(3)$ (تزايد)
سالب $f''(3)$ تقعر للأسفل

$f'(3)\ f''(3)$ ⇐
سالب · موجب
= سالب ⇒ $< 0 \Rightarrow \boxed{b}$

أي مما يلي له قيمة عظمى مطلقة عند $x=0$

a)


b)


c)


d)

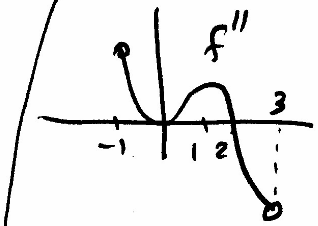

a) غير متصل عند الصفر ⇓ ولا أشي

b) صغرى عند $x=0$

c) عظمى محلية لكن ليست مطلقة

d) عظمى مطلقة $\boxed{d}$

(2022) معتمد الشكل المجاور الذي يمثل منحنى المشتقة الثانية للاقتران f



أجب عن الفقرتين الآتيتين

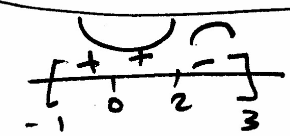
- مجموعة قيم x التي يتغير الاقتران f تقعره حولها هي

a) $\{0,1\}$　b) $\{1\}$
c) $\{0\}$　d) $\{2\}$

- الفترة التي يكون فيها منحنى الاقتران مقعراً للأسفل هي

a) $(2,3)$　b) $(-1,0)$　c) $(0,2)$　d) $(-1,2)$

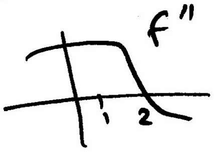
الحل



$\{2\} \Longrightarrow \boxed{d}$

$(2,3) \Longrightarrow \boxed{a}$

الشكل المجاور يمثل منحنى f''، إذا علمت أن $f'(1)=0$، فإن للاقتران f عند $x=1$ قيمة

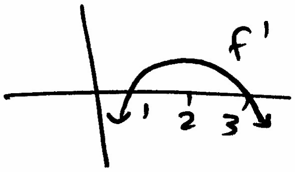


a) صغرى محلية　b) عظمى محلية
c) صغرى مطلقة　d) عظمى مطلقة

الحل $f'(1)=0$, $f''(1)>0$ ⟶ صغرى محلية ⟶ $\boxed{a}$

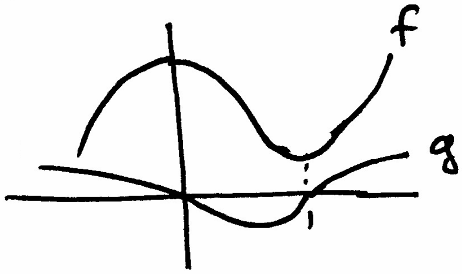
(حسب اختبار المشتقة الثانية)

الشكل المجاور يمثل منحنى f'، بالاعتماد عليه



① فترات التزايد والتناقص للاقتران f
② النقط الحرجة للاقتران f عند x تساوي ...
③ يوجد قيمة عظمى محلية للاقتران f عند x تساوي ...
④ فترات التقعر للأعلى وللأسفل للاقتران f
⑤ نقاط الانعطاف للاقتران f عند x تساوي ...
⑥ مماس أفقي للاقتران f

① تزايد $(1,3)$　تناقص $(-\infty,1)(3,\infty)$
② حرجة $x=\{1,3\}$
③ عظمى محلية $x=\{3\}$
④ f' تزايد ⟹ تقعر f للأعلى ⟹ $(-\infty,2)$　☒ f' تناقص ⟹ تقعر f للأسفل ⟹ $(2,\infty)$
⑤ انعطاف $x=2$
⑥ مماس أفقي $x=1, 3$　$(f'=0)$



بالاعتماد على الشكل المجاور

أي مما يلي صحيح

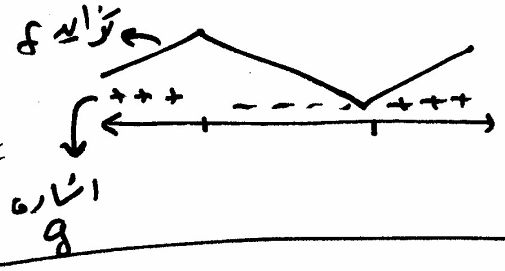
a) $f'=g$ b) $g'=f$

c) $f'=g'$ d) $f''=g''$

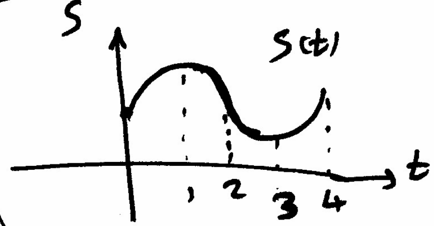
$f'(0)=0$ & $g(0)=0$

$f'(1)=0$ & $g(1)=0$ $\Longrightarrow f'=g$ $\boxed{a}$

للتأكد أكثر



✓ $\Longrightarrow g \equiv f'$ $\boxed{a}$



بالاعتماد على الشكل المجاور الذي يمثل منحنى $s(t)$

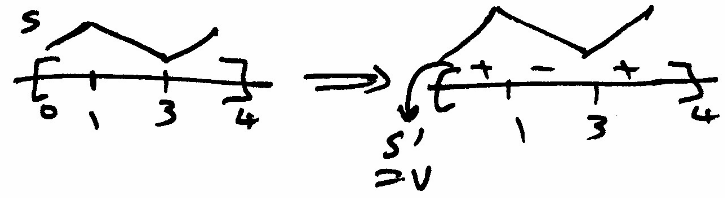
جد ① قيم t التي يكون فيها الجسم في حالة سكون

② الفترة التي يتحرك فيها الجسم في الاتجاه السالب

③ فترة تزايد السرعة المتجهة

① $v(t)=0 \Longrightarrow s'=0 \Longrightarrow t=\{1,3\}$

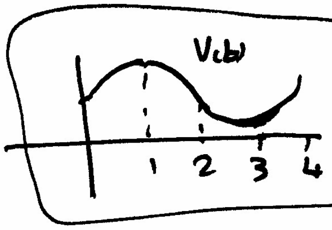
②



$\Longrightarrow (1,3)$ v سالبة

③

$\underset{(s')}{v}$ تزداد $\Longrightarrow$ مقعر للأعلى $\Longrightarrow (2,4)$



الشكل المجاور يمثل منحنى $v(t)$، بالاعتماد عليه

حدد متى تزداد السرعة المتجهة

v تزداد $(0,1)$ &

$(3,4)$

2023
جيل 2005

إذا كان: $x \neq 0$, $f(x) = \frac{x}{3} + \frac{9}{x}$ ، فإنّ القيمة العظمى المطلقة للاقتران $f(x)$ في الفترة $[-6, -1]$ هي:

a) $-3\sqrt{3}$ b) $-2\sqrt{3}$ c) $-\frac{7}{2}$ d) $-\frac{28}{3}$

اكل المجال $[-6,-1]$

لا داعي لاستثناء اصفار المقام لانه الفترة استثنتها

$$f'(x) = \frac{1}{3} - \frac{9}{x^2} = \frac{x^2-27}{3x^2}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x^2 - 27 = 0$$

$$\underset{\text{رفض}}{x = \sqrt{27}} \quad ، \quad \underset{\in[-6,-1]}{-\sqrt{27}}$$

$$[-6 \quad -\sqrt{27} \quad -1]$$

$$f(-6) = \frac{-6}{3} + \frac{9}{-6} = -3.5$$

$$f(-\sqrt{27}) = -\frac{\sqrt{27}}{3} + \frac{9}{-\sqrt{27}} = -3.46 \Rightarrow$$ اكبر قيمة

$$f(-1) = \frac{-1}{3} + \frac{9}{-1} = -9.3$$

$$f(-\sqrt{27}) = \frac{-\sqrt{27}}{3} + \frac{9}{-\sqrt{27}}$$

$$= \frac{-3\sqrt{3}}{3} + \frac{9}{-3\sqrt{3}}$$

$$= -\sqrt{3} - \frac{3}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$$

$$= -\sqrt{3} - \sqrt{3}$$

$$= -2\sqrt{3} \Longrightarrow \boxed{b}$$

2023
جيل 2005

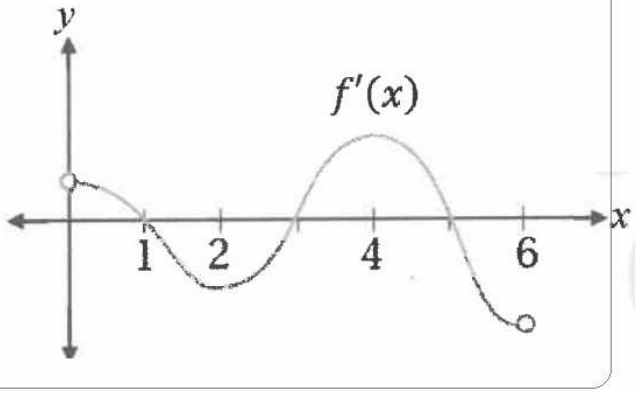
معتمدًا الشكل الآتي الذي يمثّل منحنى المشتقة الأولى للاقتران $f(x)$، ما الفترة (الفترات) التي يكون فيها منحنى الاقتران $f(x)$ مقعرًا لأعلى؟

a) $(0,1),(3,5)$

b) $(0,2)$

c) $(1,3),(5,6)$

d) $(2,4)$



مقعر للاعلى $f \Rightarrow f'$ متزايد $\Longrightarrow (2,4) \Longrightarrow \boxed{d}$

تطبيقات القيم القصوى

سؤال

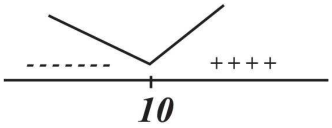
جد العددين الذين مجموعهما 20 ، و مجموع مربعيهما أقل ما يمكن.

الحل

$f = x^2 + y^2$ $\qquad$ $x + y = 20 \longrightarrow y = 20 - x$

$$f(x) = x^2 + (20 - x)^2 = x^2 + 400 - 40x + x^2 = 2x^2 - 40x + 400$$

$$\boxed{f'(x) = 4x - 40} = 0 \longrightarrow x = 10$$



المجموع أقل ما يمكن عند $\boxed{x = 10}$

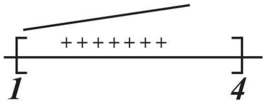
$\longrightarrow y = 20 - 10 \longrightarrow \boxed{y = 10}$

سؤال

جد عدد ينتمي إلى الفترة [4 , 1] ، بحيث يكون مجموعه مع مكعبه أكبر ما يمكن .

الحل

$$f(x) = x + x^3 \longrightarrow f'(x) = 1 + 3x^2 = 0 \longrightarrow x = \{\ \}$$



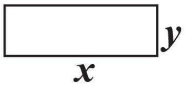
أكبر ما يمكن عند $x = 4$

سؤال

قطعة أرض مستطيلة الشكل محيطها 600m جد بعدى قطعة الأرض لتكون مساحتها أكبر ما يمكن .

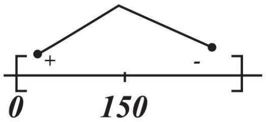
الحل

$2x + 2y = 600 \longrightarrow y = 300 - x$



$A = xy \longrightarrow A = x(300 - x) = 300x - x^2$

$A'(x) = 300 - 2x = 0 \longrightarrow x = 150$



أكبر ما يمكن عند $x = 150$

$\longrightarrow y = 300 - 150 = 150$

خطط مُزارع لتسييج حظيرة مستطيلة الشكل قرب نهر كما في الشكل المجاور, و حدد مساحة الحظيرة ب $800\ m^2$ لتوفير كمية عشب كافية لأغنامه.
أجد أبعاد الحظيرة التي تجعل طول السياج أقل ما يُمكن , علماً بأن الجزء المقابل للنهر لا يحتاج إلي تسييج

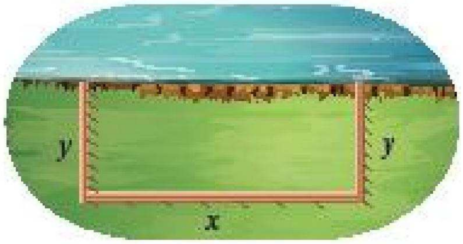
الحل

$l = 2y + x$

$800 =$ المساحة

$x\,y = 800$

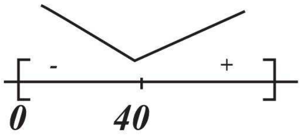
$y = \frac{800}{x}$



$l(x) = 2\,(\frac{800}{x}) + x$

$\longrightarrow \boxed{l(x) = \frac{1600}{x} + x} \longrightarrow l'(x) = -\frac{1600}{x^2} + 1 \longrightarrow \boxed{l'(x) = \frac{x^2 - 1600}{x^2}}$

$l' = 0 \longrightarrow x^2 - 1600 = 0 \longrightarrow x = \pm 40$



l' غ م $\longrightarrow x = \{\,\}$

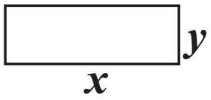
$$\boxed{\begin{array}{l} x = 40 \\ y = \frac{800}{40} = 20 \end{array}}$$

سؤال

يراد تسييج قطعة أرض مستطيلة الشكل بسياج طول p متر . جد أبعاد قطعة الأرض (بدلالة p) لتكون مساحتها أكبر ما يمكن .

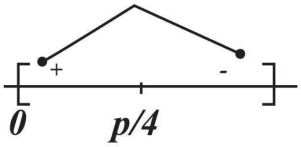
الحل

$\longrightarrow 2x + 2y = p \longrightarrow \boxed{y = \frac{p}{2} - x}$



$A = xy = x\,(\frac{p}{2} - x) = \frac{p\,x}{2} - x^2$

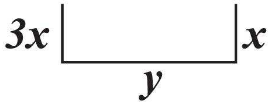
$\boxed{A'(x) = \frac{p}{2} - 2x} = 0 \longrightarrow x = \frac{p}{4}$

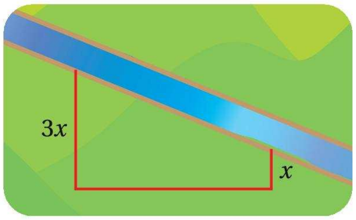


أكبر ما يمكن عند $x = \frac{p}{4}$

$y = \frac{p}{2} - \frac{p}{4} = \frac{p}{4} \longrightarrow \frac{p}{4}\ ,\ \frac{p}{4}$ الابعاد

لدى مُزارع 400 m من السياج , و هو يريد تسيج حقله الذي يأخذ شكل شبه مُنحرف , و يوجد على حافة النهر كما فى الشكل التالي : إذا كان طول أحد الضلعين المتوازيين يساوي 3 أمثال طول الضلع الآخر , فأجد أكبر مساحة يُمكن للمُزارع ان يحيطها بهذا السياج , علمًا بأن الجزء المقابل للنهر لا يحتاج الي تسيج

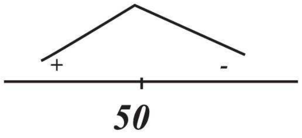




الحل

$3x + y + x = 400 \longrightarrow y = 400 - 4x$

$A = \frac{1}{2}(x + 3x)\,y = 2xy = 2x(400 - 4x)$



$\boxed{A(x) = 800x - 8x^2}$

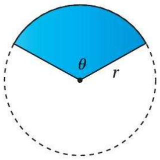
$\boxed{A'(x) = 800 - 16x} = 0 \quad x = 50$

أكبر ما يمكن عند $x = 50$

$A = 800(50) - 8(50)^2 \longrightarrow A = 20.000$

سؤال

لدى مُزارع p مترا طوليا من سياج , يرغب في استعماله كاملاً لتسيج حقل رَعي على شكل قطاع دائري , زاويته θ بالراديان , في دائرة نصف قطرها r مترا كما في الشكل المجاور.



01 **أُثبت أنّ طول السياج اللازم إحاطة الحقل به هو $P=r(\theta+2)$**

02 **أُثبت أنّ مساحة القطاع هي $A = \frac{1}{2}pr - r^2$.**

03 **أجد نصف قطر القطاع بدلالة p الذي تكون عنده مساحة الحقل اكبر ما يُمكن.**

الحل 1

$p = r + r + r\theta \longrightarrow p = 2r + r\theta \longrightarrow p = r(\theta + 2)$

الحل 2

$A = \frac{1}{2}r^2\theta$ لكن $r\theta = p - 2r$

$\longrightarrow \theta = \frac{p}{r} - 2$

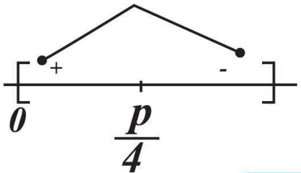
$\longrightarrow A = \frac{1}{2}r^2\left(\frac{p}{r} - 2\right)$

$\longrightarrow A = \frac{pr}{2} - r^2$ (p ثابت)

الحل 3

$A' = \frac{p}{2} - 2r = 0 \longrightarrow r = \frac{p}{4}$

المساحة أكبر ما يمكن $r = \frac{p}{4}$



أ/ ثام

سؤال

يُبين الشكل المجاور نافذة مُكونة من جزأين , أحدهما علوي على شكل نصف دائرة قطرها xm و الآخر سفلي على شكل مستطيل عرضه xm و ارتفاعه ym.
صنع الجزء العلوي من زجاج مُلوَّن يسمح بمرور 1 وحدة ضوء لكل متر مربع , و صُنع الجزء السفلي من زجاج شفاف يسمح بمرور 3 وحدات ضوء لكل متر مربع. أجد قيمة كلٍّ من x, y التي تجعل كمية الضوء المار خلال النافذة أكبر ما يُمكن , علما بأن 10m من المعدن الرقيق استُعمل في تشكيل إطار النافذة كاملا بما في ذلك القطعة الفاصلة بين الجزأين.

الحل

$$Q = 1(\frac{1}{2}\pi r^2) + 3(xy)$$

$$2x + 2y + \pi r = 10 \qquad x = 2r$$

$$y = 5 - \frac{\pi x}{2} - x \qquad r = \frac{x}{2}$$

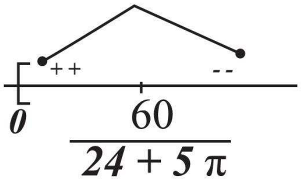
$$y = 5 - \frac{\pi x}{4} - x$$

$$Q(x) = \frac{\pi}{2}(\frac{x}{2})^2 + 3x(5 - \frac{\pi r}{4} - x)$$

$$Q(x) = \frac{\pi}{8}x^2 + 15x - \frac{3\pi x^2}{8} - 3x^2) \rightarrow Q(x) = 15x - 3x^2 - \frac{5\pi}{8}x^2$$

$$\boxed{Q(x) = 15 - 6x - \frac{15\pi}{4}x} = 0 \rightarrow x = \frac{15}{6 + \frac{5\pi}{4}}$$

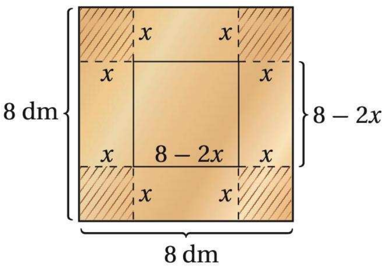
$$\boxed{x = \frac{60}{24 + 5\pi}} \rightarrow$$

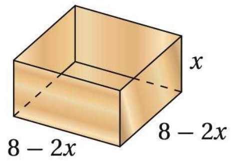


$$\boxed{y = \frac{60 + 10\pi}{24 + 5\pi}}$$

سؤال

صندوق على شكل متوازي مستطيلات , صُنع من قطعة كرتون رقيقة , مربعة الشكل , طولها 8dm و ذلك بقطع 4 مربعات من زواياها , و طَيِّ الجوانب إلى الأعلى . أجد أبعاد الصندوق ليكون حجمه أكبر ما يُمكن.





الحل

$v = (8 - 2x)(8 - 2x)x$

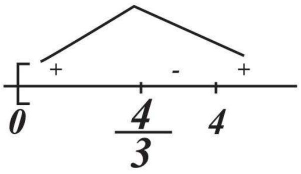
$v = 4x^3 - 32x^2 + 64x$

$v' = 12x^2 - 64x + 64$

$3x^2 - 16x + 16 = 0$

$(3x - 4)(x - 4) = 0$

$x = \frac{4}{3}, 4$



أكبر حجم $\longrightarrow x = \frac{4}{3}$

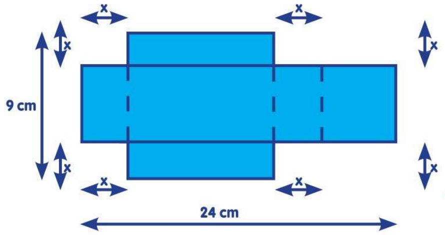
الطول $\longrightarrow 8-2x = 8 - 2(\frac{4}{3}) = \frac{16}{3}$

العرض $\longrightarrow 8-2x = 8 - 2(\frac{4}{3}) = \frac{16}{3}$

الارتفاع $\longrightarrow = \frac{4}{3}$

سؤال

قطعة كرتون طولها 24cm و عرضها 9 cm , أزيل منها مربعان متطابقان و مستطيلان متطابقان كما في الشكل المجاور , بحيث أمكن طيِّها و تكوين صندوق له غطاء منها :

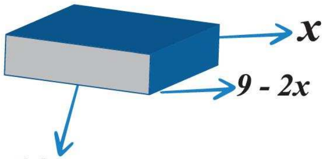


01 أكتب الاقتران $V(x)$ الذي يُمثل حجم الصندوق.

02 أُحدد مجال الاقتران V.

03 أجد أبعاد الصندوق بحيث يكون حجمه أكبر ما يُمكن.

الحل

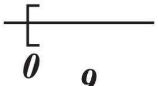


فكر مليح $12 - x$

$v = x(12 - x)(9 - 2x)$

$v = 2x^3 - 33x^2 + 108x$

$x > 0 \longrightarrow$



$9 - 2x > 0 \longrightarrow x < \frac{9}{2} \longrightarrow (0, \frac{9}{2})$

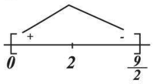
$12 - x > 0 \longrightarrow x < 12$

$v'(x) = 6x^2 - 66x + 108 = 0$

$x^2 - 11x - 18 = 0$

$(x-9)(x-2) = 0$

$\longrightarrow x = 2, 9$



الارتفاع $\longrightarrow x = 2$

الطول $\longrightarrow 12 - x = 12 - 2 = 10$

العرض $\longrightarrow 9 - 2x = 9 - 2(2) = 5$

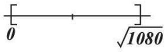
سؤال

ترغب شركة في تصميم صندوق مفتوح من الأعلى و قاعدته مربعة الشكل , و مساحة سطحه الكلية $1080 \ cm^2$, أجد أبعاد الصندوق ليكون حجمه أكبر ما يُمكن.

الحل

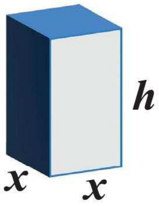
المساحة $v = x^2 + 4xh = 1080$

$h = \dfrac{1080 - x^2}{4x} \xrightarrow{\text{المجال}}$



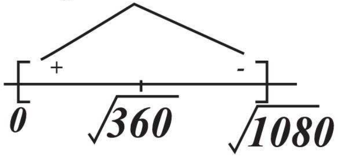
$v = x.\ x.h = x^2 \dfrac{1080 - x^2}{4x}$

$v = \dfrac{1}{4}(1080\,x - x^3)$



$v'(x) = \dfrac{1}{4}(1080 - 3x^2) = 0$

$x = \sqrt{360}$



القاعدة : $\sqrt{360} \quad \sqrt{360}$

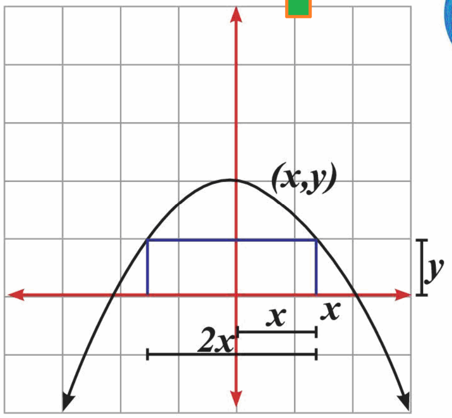
الارتفاع = $\dfrac{1080 - 360}{4\sqrt{360}} = \dfrac{720}{4\sqrt{360}}$

$\dfrac{180}{\sqrt{360}}$

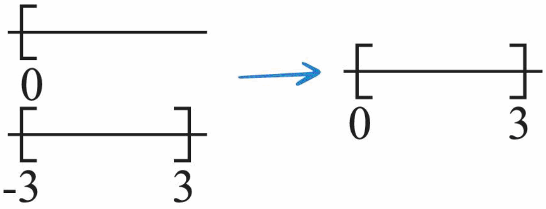
سؤال

سؤال

جد أكبر مساحة ممكنة لمستطيل يمكن رسمه فوق محور X بحيث تكون احدى قاعدتيه على محور X . و رأساه الآخران على منحنى الاقتران $F(X) = 9 - x^2$



الحل



الطول : $2x$

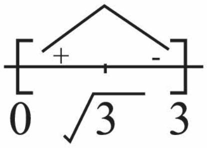
العرض $y = 9 - x^2$

$A = 2x(9 - x^2)$

$A = 18x - 2x^3 \longrightarrow A' = 18 - 6x^{2 = 0}$

$\longrightarrow x = \pm\sqrt{3}$

$x = \sqrt{3}$ أكبر ما يمكن عند $\longleftarrow$

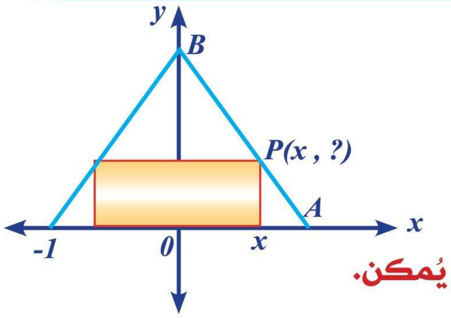


$\longrightarrow A = 18\sqrt{x} - 2(\sqrt{x})^3 = 12\sqrt{3}$

سؤال

سؤال

يبين الشكل المجاور مستطيلاً مرسوماً داخل مثلث قائم الزاوية و هو متطابق الضلعين ، و طول قاعدته 2 وحدة طول :



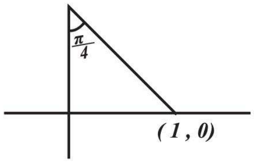
01 أجد الاحداثي y للنقطة p بدلالة x.

02 أكتب مساحة المستطيل بدلالة x.

03 أجد أكبر مساحة مُمكنة للمستطيل.

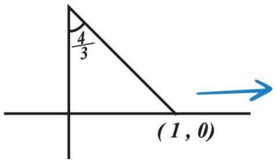
04 أجد أبعاد المستطيل التي تجعل مساحته أكبر ما يُمكن.

الحل أولاً معادلة



$$y - y1 = m(x - x_1)$$

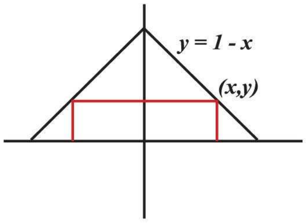
$$y - 0 = m(x - 1)$$



$$\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} \longrightarrow m = \tan\left(\frac{3\pi}{4}\right)$$

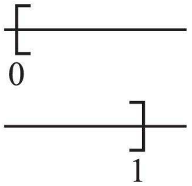
$$m = -1$$

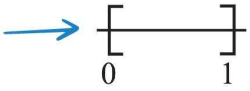
$$\longrightarrow y = -(x - 1) \longrightarrow \boxed{y = 1 - x}$$



الطول : $2x$

العرض $y = 1 - x$

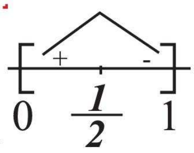




$$A = 2x(1 - x)$$

$$\boxed{A = 2x - 2x^2}$$

$$A' = 2 - 4x = 0 \longrightarrow x = \frac{1}{2}$$



الطول : $2\left(\frac{1}{2}\right) = 1$

العرض : $1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

$A=$ الطول . العرض $= (1)\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$

سؤال

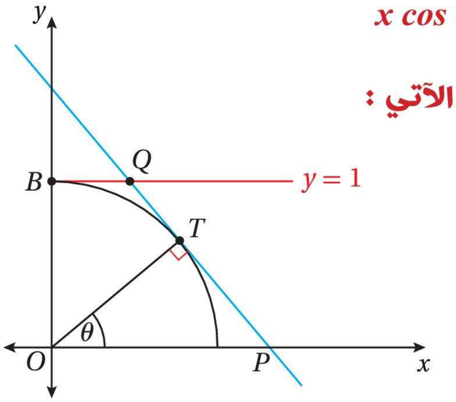
تقع النقطة T على دائرة الوحدة التي معادلتها $x^2 + y^2 = 1$ عند الزاوية θ من المحور x الموجب حيث $0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$ كما في الشكل المجاور.

01 أُثبت أنّ معادلة الخط المستقيم PT هي : $x \cos\theta + y \sin\theta = 1$

02 أُثبت أنّ مساحة شبه المنحرف OBQP تعطي بالاقتران الآتي :

$$A = \frac{2 - \sin\theta}{2\cos\theta}$$

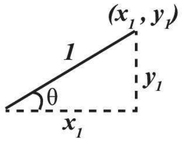
03 أجد قياس الزاوية θ الذي تكون عنده مساحة شبه المنحرف أقل ما يُمكن.



الحل

معادلة المماس

$$2x + 2y\,y' = 0 \longrightarrow y' = \frac{-x}{y}$$



$$\frac{y_1}{1} = \sin\theta$$

$$\frac{x_1}{1} = \cos\theta$$

2

$$\longrightarrow \boxed{m = \frac{-\cos\theta}{\sin\theta}}$$

معادلة المماس $\longrightarrow$ $y - y_1 = \frac{-\cos\theta}{\sin\theta}(x - x_1)$

$$y - \sin\theta = \frac{-\cos\theta}{\sin\theta}(x - \cos\theta)$$

$$\longrightarrow \boxed{x\cos\theta + y\sin\theta = 1}$$

$$A = \frac{1}{2}(b_1 + b_2)h = \frac{1}{2}\left(\frac{1 - \sin\theta}{\cos\theta} + \frac{1}{\cos\theta}\right)(1)$$

$$A = \frac{2 - \sin\theta}{2\cos\theta}$$

$$A' = \frac{2\cos\theta(-\cos\theta) - (2 - \sin\theta)(-2\sin\theta)}{(2\cos\theta)^2}$$

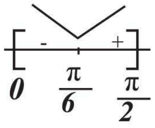
$$= \frac{-2\cos^2\theta + 4\sin\theta - 2\sin^2\theta}{(2\cos\theta)^2} =$$

$$= \frac{4\sin\theta - 2(\cos^2\theta + \sin^2\theta)}{4\cos^2\theta}$$

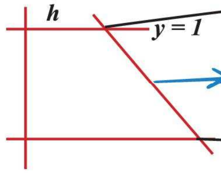
$$A = \frac{4\sin\theta - 2}{4\cos^2\theta}$$

$=0 \longrightarrow \sin\theta = \frac{1}{2} \longrightarrow \theta = \frac{\pi}{6}$

$=0 \longrightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$



$\theta = \frac{\pi}{6}$ أقل ما يمكن عند $\longleftarrow$



$$x\cos\theta + 1.\sin\theta = 1$$

$$\longrightarrow x\cos\theta + y\sin\theta = 1$$

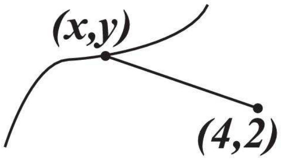
$$x = \frac{1 - \sin\theta}{\cos\theta} = b_1$$

$$x\cos\theta + 0 = 1 \longrightarrow x = \frac{1}{\cos\theta} = b_2$$

سؤال

جد النقطة على منحنى $f(x) = \sqrt{8x}$ التى تكون أقرب ما يمكن إلى النقطة (4,2)

الحل



$$s = \sqrt{(x -4)^2 + (y -2)^2}$$

$$s = \sqrt{(x -4)^2 + (\sqrt{8x} -2)^2}$$

$$\sqrt{8x} \longrightarrow x \in [0 , \infty]$$

$$s' = \frac{2 (x -4) + \cancel{2} \sqrt{8x} - 2) . \frac{8}{\cancel{2} \sqrt{8x}}}{2 \sqrt{(x -4)^2 + (\sqrt{8x} -2)^2}}$$

$$s' = 2x - 8 + \sqrt{8x} \frac{8}{\sqrt{8x}} - \frac{16}{\sqrt{8x}} \Big/ 2 \sqrt{(x -4)^2 + (\sqrt{8x} -2)^2}$$

$$s' = \frac{2x - \cancel{8} + \cancel{8} - \frac{16}{\sqrt{8x}}}{2 \sqrt{(x -4)^2 + (\sqrt{8x} -2)^2}} \longrightarrow s' = \frac{\frac{2x \sqrt{8x} - 16}{\sqrt{8x}}}{2 \sqrt{(x -4)^2 + (\sqrt{8x} -2)^2}}$$

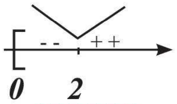
$$\boxed{s' = \frac{x \sqrt{8x} - 8}{\sqrt{8x} \sqrt{(x -4) + (8x - 2)^2}}}$$

$\longrightarrow s' = 0 \longrightarrow x \sqrt{8x} = 8$

$x^2 (8x) = 64$

$\longrightarrow x = 2$

$\longrightarrow$ s' غ م $\longrightarrow x = 0$



$$\longrightarrow x = 2 \longrightarrow y = f(2) = 4 \longrightarrow \boxed{(2,4)}$$

سؤال

كتاب التمارين

سلك يبلغ طوله 24 cm ، و يراد قصه إلى قطعتين لصنع دائرة و مربع.

01 **حدّد مكان القص بحيث يكون مجموع مساحتي الدائرة و المربع أصغر ما**

02 **حدّد مكان القص بحيث يكون مجموع مساحتي الدائرة و المربع أكبر ما يمكن.**

الحل

$$4x + 2\pi r = 24$$

$$x = 6 - \frac{\pi}{2} r$$

$$x > 0$$

$$6 - \frac{\pi}{2} r > 0 \longrightarrow [0 , \frac{12}{\pi}] \longrightarrow$$

$$r < \frac{12}{\pi}$$

$$A = x^2 + \pi r^2$$

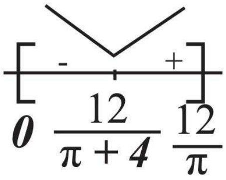
$$A = (6 - \frac{\pi}{2} r)^2 + \pi r^2$$

$$A'(r) = 2(6 - \frac{\pi}{2} r) . (\frac{-\pi}{2}) + 2 \pi r^2$$

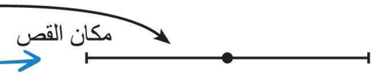
$$\boxed{A'(r) = -6\pi + \frac{\pi^2}{2} r + 2\pi r = 0}$$

$$\longrightarrow r = \frac{6\pi}{\frac{\pi^2}{2} + 2\pi} \longrightarrow r = \frac{12}{\pi + 4}$$

$r = \frac{12}{\pi + 4}$ أقل مساحتين عندما



محيط الدائرة $\longrightarrow 2\pi r = \frac{24\pi}{\pi + 4} \longrightarrow$



أكبر مساحتين $\longrightarrow$ $A(0) = 36 \longrightarrow r = \frac{12}{\pi} \longrightarrow$ محيط الدائرة $= 2\pi r$

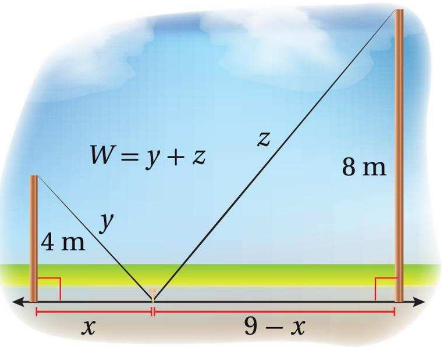
$$A(\frac{12}{\pi}) = \frac{144}{\pi} \approx 46$$

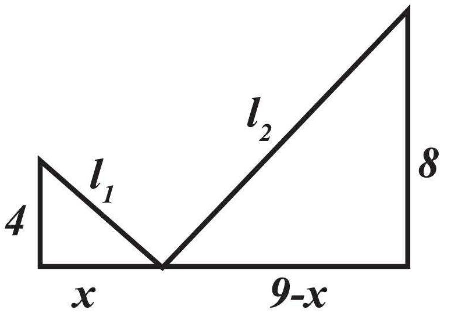
$$= 2\pi . \frac{12}{\pi} = 24$$

من الكتاب

سؤال

عمودان طول أحدهما 8m , و طول الآخر 4m و المسافة بينهما 9m و هما مُثبتان بسلكين يصلان قمة كل عمود بوتد عند سطح الأرض كما في الشكل المجاور . أجد الموقع المناسب لتثبيت الوتد بين العمودين بحيث يكون طول السلك المستعمل أقل ما يُمكن





x€ = [0 , 4]

الحل

$$l = l_1 + l_2$$

$$= \sqrt{x^2 + 16} + \sqrt{(9 - x)^2 + 64}$$

$$l'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 16}} + \frac{-2(9-x)}{2\sqrt{(1-x)^2 + 64}}$$

$$l'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 16}} + \frac{x - 9}{\sqrt{(9-x)^2 + 64}}$$

$$= \frac{x\sqrt{(9-x)^2 + 64} + (x-9)\sqrt{x^2 + 16}}{\sqrt{x^2 + 16}\,\sqrt{(9-x)^2 + 64}}$$

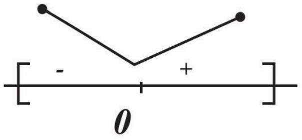
$$l' = 0 \longrightarrow x\sqrt{(9-x)^2 + 64} = -(x-9)\sqrt{x^2 + 16}$$

ربع الطرفين $x^2 ((9 - x)^2 + 64) = (x - 9)^2 (x^2 + 16)$

$$x^2(9 - x)^2 + 64x^2 = x^2(x - 9)^2 + 16(x - 9)$$

$$4x^2 = (x-9)^2 \nearrow 2x = x - 9 \longrightarrow \boxed{x = -9}$$

$$4x^2 = (x-9)^2 \searrow 2x = -(x - 9) \longrightarrow x = 3$$



أقصر سلك عند x = 3

من الكتاب

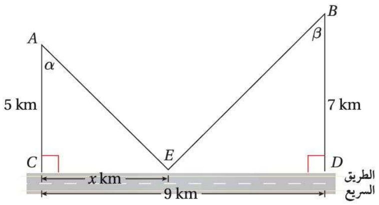
سؤال

يُمارس يوسف هواية ركوب الدرجات . و في أحد الأيام , أنطلق على درّاجته من البيت عند النقطة A إلى المدرسة عند النقطة B , مارًا بالنقطة E الواقعة على حافة الطريق السريع كما في الشكل المجاور:

01 إذا كان الاقتران L يُمثل المسافة التي يقطعها يوسف من البيت إلي المدرسة ، فأكتب L بدلالة x.

02 أُثبت أنّه إذا كان $\frac{dL}{dX} = 0$ فإن sin α = sin β

03 أجد قيمة x التي تجعل المسافة التي يقطعها يوسف أقل ما يُمكن.



الحل

$$l = \sqrt{x^2 + 25} + \sqrt{(9 - x)^2 + 49}$$

$$x \in [\,0\,,\,9\,]$$

$$\frac{dl}{dx} = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 25}} + \frac{-2\,(9 - x)}{2\,\sqrt{(9 - x)^2 + 49}}$$

$$\sin\alpha = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 25}}$$

$$\frac{dl}{dx} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 25}} + \frac{x - 9}{\sqrt{(9 - x)^2 + 49}} = 0$$

$$\sin\beta = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} = \frac{9 - x}{\sqrt{(9 - x)^2 + 49}}$$

$$\frac{dl}{dx} = 0 \longrightarrow \frac{x}{\sqrt{x^2 + 25}} + \frac{x - 9}{\sqrt{(9 - x)^2 + 49}} = 0$$

$$\longrightarrow \frac{x}{\sqrt{x^2 + 25}} = \frac{9 - x}{\sqrt{(9 - x)^2 + 49}} \longrightarrow \boxed{\sin\alpha = \sin\beta}$$

$$\frac{dl}{dx} = \frac{x\sqrt{(9 - x)^2 + 49} + (x - 9)\sqrt{x^2 + 25}}{\sqrt{x^2 + 25}\,\sqrt{(9 - x)^2 + 49}} = 0$$

$$x\sqrt{(9 - x)^2 + 49} = -(x - 9)\sqrt{x^2 + 25}$$

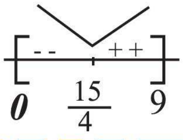
$$x^2((9 - x)^2 + 49) = (x - 4)^2(x^2 + 25)$$

ربع الطرفين

$$x^2\cancel{(x - 9)}^2 + 49x^2 = x^2\cancel{(x - 9)}^2 + 25(x - 9)^2$$

$$\longrightarrow 7x = 5(x - 9) \longrightarrow 2x = -45 \longrightarrow x = \frac{-45}{2}\ \alpha$$

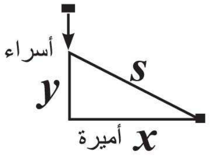
$$\longrightarrow 7x = -5(x - 9) \longrightarrow 12x = +45 \longrightarrow x = \frac{45}{12} = \frac{15}{4}$$



$\longrightarrow$ أقل مسافة عند $x = \frac{15}{4}$

سؤال

تتدرَّب إسراء و أميرة يومياً استعداداً لسباق العَدْوِ (المارثون) . في أحد الأيام , أنطلقت إسراء من منزلها الذي يقع على بُعدْ 20km شمال منزل أميرة الساعة 9.00am , و أتجهت جنوباً بسرعة 8km/h و في الوقت نفسه , انطلقت أميرة في اتجاه الشرق بسرعة 6 km/h في أي ساعة تكون إسراء و أميرة أقرب ما يُمكن إلى بعضهما علما بأنَّ كُلا منهما ركضت مدة 2.5h



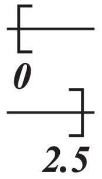
الحل

$x = x_0 + x' t = 0 + 6t \longrightarrow x = 6t$

$y = y_0 + y' t = 20 - 8t \longrightarrow y = 20 - 8t$

$x > 0 \longrightarrow t > 0$

$y > 0 \longrightarrow 20 - 8t > 0$



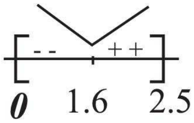
$s = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(6t)^2 + (20 - 8t)^2} \neq$

$s(t) = \sqrt{100 t^2 - 320 t + 400}$

$s' = \dfrac{200 t - 320}{2\sqrt{100 t^2 - 320 t + 400}} = 0$

$t = 1.6$

$t = \{\ \}$



أقل مسافة عند $x = 1.6$ ⟵ الساعة

9.00 + 1 : 36 = 10 : 36

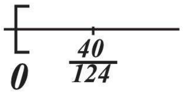
سؤال

يلتقى طريقان مستقيمان عند النقطة R بزاوية قياسها $\frac{\pi}{3}$. إذا انطلقت السيارة A من النقطة R على أحد الطريقين بسرعة 80km/h، وفي الوقت نفسه انطلقت السيارة B بسرعة 50km/h على الطريق الآخر في اتجاه النقطة R من نقطة تبعد عنها مسافة 100km. فأجد أقصر مسافة ممكنة بين

الحل

$x = 100 - 50 t$

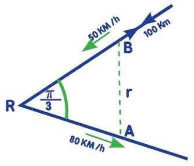
$y = 80 t$



$s = \sqrt{12900 t^2 - 18000 t + 10000} \quad t \in [0, \infty)$

$s' = \dfrac{-18000 + 25800t}{2\sqrt{}} = 0 \longrightarrow t = \dfrac{90}{129}$

$s\left(\frac{90}{129}\right) = \sqrt{12900 \left(\frac{90}{129}\right) - 18000 \left(\frac{90}{129}\right) + 10000}$



$s = \sqrt{(100 - 50 t)^2 + (80t)^2 - 2(100 - 50t)(80t) . \cos \frac{\pi}{3}}$

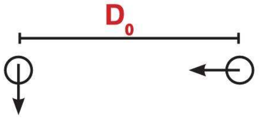
سؤال

أنطلق قطار من إحدى المحطات الساعة 10.00am , و تحرك في اتجاه الجنوب بسرعة 60km/h حيث المحطة التالية . وفي الوقت نفسه , أنطلق قطار آخر نحو الغرب بسرعة 54 km/h , ثم وصل إلى محطة انطلاق القطار الأول الساعة 11.00 am في اي ساعة يكون القطاران أقرب ما يُمكن إلى بعضهما ؟؟

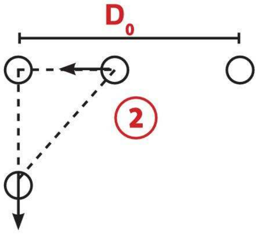
الحل

أصفن فى السؤال مليح هتفهم أن القطارين كانت في بداية الحركة في الاماكن التالية :

البداية



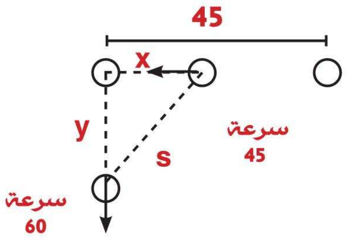
ثم أصبحن كاتتالي



لحساب D_0 القطار الاول : المسافة = السرعة × الزمن

1 × 45 =

45 =



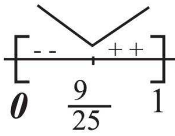
$$y = 60t$$

$$x = 45 - 45t$$

$$s = \sqrt{(60t)^2 + (45 - 45t)^2}$$

→ $$\boxed{s'(t) = \frac{11250t - 4050}{2\sqrt{\quad}}} = 0$$

→ $$t = \frac{4050}{11250} = \frac{9}{25}$$



→ $$t = \frac{9}{25}(60) \approx 21$$

→ الساعة 10:21

سؤال

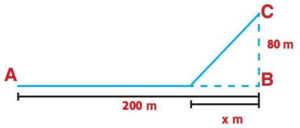
يمتد مسار للركض شرقا من النقطة A إلى النقطة B مسافة 200 m و تقع النقطة c على بُعد 80m شمال النقطة B.انطلق راكب على دراجة من النقطة A إلى النقطة D بسرعة 10m/s , حيث تقع النقطة D على بُعد x متراً غرب النقطة B , ثم سار في طريق مستقيم من النقطة D إلي النقطة C بسرعة6m/s.

01 أجد اقترانا بدلالة x يُمثل الزمن الذي يستغرقه راكب الدراجة في الانتقال من النقطة A إلى النقطة C.

02 بافتراض أن x قيمة مُتغيرة , أجد قيمة x التي يكون عندها الزمن الازم للانتقال من النقطة A إلى النقطة C أقل ما يمكن.

الحل

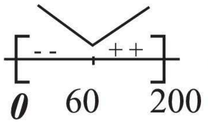
$$t = t_1 + t_2 = \frac{200 - x}{+1} + \frac{\sqrt{x^2 + 80^2}}{6} \quad x \in [0 , 200]$$



$$t'(x) = \frac{-1}{10} + \frac{1}{6} \frac{2\,x}{2\sqrt{x^2 + 6400}} = 0 \longrightarrow \sqrt{x^2 + 6400} = \frac{5}{3}\,x$$

$$\longrightarrow x^2 + 6400 = \frac{25}{9}x^2 \longrightarrow 9x^2 + 9(6400) = 25\,x^2$$

$$16x^2 = 9.6400 \longrightarrow 4x = 3.80 \longrightarrow \boxed{x = 60}$$

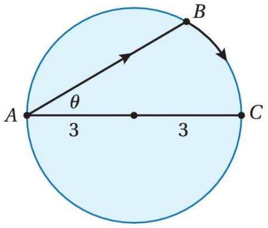


$\longrightarrow$ أقل ما يمكن عند x=60

سؤال

يقف رجل عند النقطة A على شاطئ بحيرة دائرية نصف قطرها 3km ، وهو يريد الوصول إلى النقطة C المقابلة تماماً للنقطة A، على الجانب الآخر من البحيرة ، في أقصر وقت ممكن كما في الشكل المجاور. يمكن للرجل أن يجدف بزورق من النقطة A إلي النقطة B بسرعة 3km/h، ثم يركض حول حافة البحيرة بسرعة 6km/h.
أحدد موقع النقطة B ليصل الرجل من النقطة A إلى النقطة C في أقل وقت ممكن ؟ أبرر إجابتي.

الحل



$$t = \frac{x}{3} + \frac{l}{6}$$

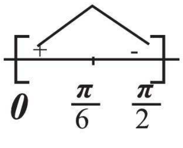
$$t = \frac{6\cos\theta}{3} + \frac{3(2\theta)}{6}$$

$$t = 2\cos\theta + \theta \qquad \theta \in [0 , \tfrac{\pi}{2}]$$

$$t' = -2\sin\theta + 1 = 0$$

$$\sin\theta = \frac{1}{2}$$

$$\theta = \frac{\pi}{6}$$



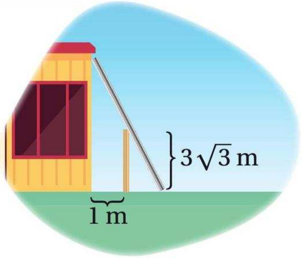
$$t(0) = 2$$

$$t(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2} \approx 1.5 \longrightarrow$$ أقل ما يمكن عند $t = \frac{\pi}{2}$

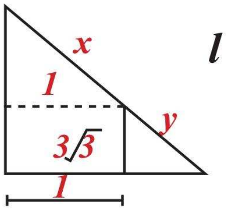
المسير كله على اليابسة

سؤال

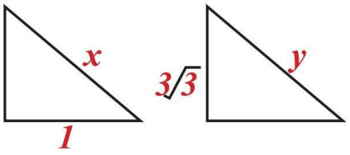
يحيط سياج ارتفاعه $3\sqrt{3}$ m بمبنى ، يبعد عنه مسافة 1 m كما فى الشكل المجاور . أجد طول أقصر سلم قد يصل من الأرض إلى المبني ، و يمر فوق السياج ملامساً له.



الحل



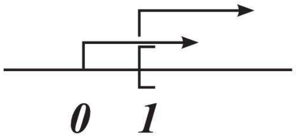
$$l = x + y$$



$$\sqrt{x^2 - 1}$$

$$\frac{y}{x} = \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{x^2 - 1}} \longrightarrow y = \frac{3\sqrt{3}\,x}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

$$l = x + \frac{3\sqrt{3}\,x}{\sqrt{x^2 - 1}}$$



$$\longrightarrow [\,1, \infty)$$

$$l' = 1 + 3\sqrt{3}\;\frac{\sqrt{x^2 - 1} - x\,\dfrac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{x^2 - 1}}}{\sqrt{(x^2 - 1)^3}}$$

$$l' = 1 + 3\sqrt{3} + \frac{x^2 - 1 - x^2}{\sqrt{(x^2 - 1)^3}} = 1 - \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{(x^2 - 1)^3}}$$

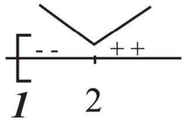
$$l' = \frac{\sqrt{(x^2 - 1)^3} - 3\sqrt{3}}{(\sqrt{x^2 - 1})^3} \xrightarrow{=0} \sqrt{(x^2 - 1)^3} = 3\sqrt{3}$$

$$(x^2 - 1)^3 = 27$$

$$x^2 - 1 = 3$$

$$x = \pm\, 2 \longrightarrow x = 2$$

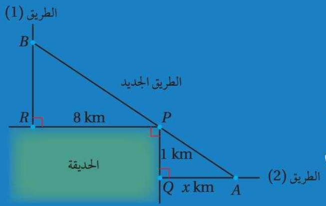
$\boxed{x = 2}$ أقصر سلم



$$y = \frac{3\sqrt{3}\,.\,2}{\sqrt{x^2 - 1}} \longrightarrow \boxed{y = 6} \longrightarrow l = 2 + 6$$

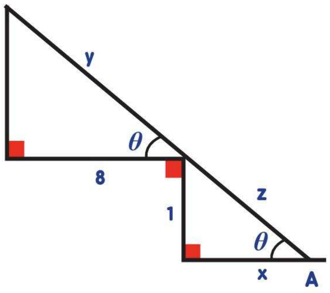
$$\boxed{l = 8}$$

سؤال



يبين الشكل المجاور مدخلين لحديقة عامة عند النقطة R و النقطة Q , و يُمكن الوصول إلى هذين المدخلين من طريقين عموديين على ضلعي الحديقة . أرادت البلدية إنشاء طريق جديد يصل بين الطريقين القديمين , و يمر بالنقطة P التى تُمثل زاوية الحديقة , فاختارت النقطة A و النقطة B على الطريقين ليكون طول الطريق الجديد أقصر ما يمكن ,علمًا بأن النقطة A تقع على بُعد x km من النقطة Q. أجد قيمة x التي تجعل طول الطريق الجديد أقصر ما يُمكن.

الحل 1



$$l = z + y$$

$$\frac{8}{y} = \cos\theta \longrightarrow \boxed{y = 8\sec\theta}$$

$$\frac{1}{z} = \sin\theta \longrightarrow \boxed{z = \csc\theta}$$

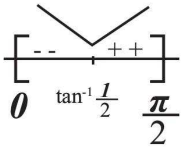
$$\boxed{l = 8\sec\theta + \csc\theta}$$

$$l' = 8\sec\theta\tan\theta - \csc\theta\cot\theta = \frac{8\sin\theta}{\cos^2\theta} - \frac{\cos\theta}{\sin\theta^2} = \boxed{\frac{8\sin^3\theta - \cos^3\theta}{\cos^2\sin^2\theta}}$$

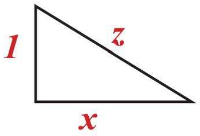
$$l' = 0 \longrightarrow 8\sin^3\theta - \cos^3\theta = 0 \xrightarrow{\div \cos^3\theta} 8\tan^3\theta - 1 = 0 \longrightarrow \tan\theta = \frac{1}{2}$$

$$\longrightarrow \theta = \tan^{-1}\frac{1}{2}$$

$\theta = \tan^{-1}\frac{1}{2}$ أقل ما يمكن عند

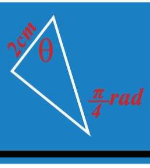


$$\longrightarrow \tan\theta = \frac{1}{2}$$



$$\frac{1}{x} = \frac{1}{2} \longrightarrow x = 2$$

سؤال

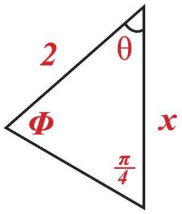


يبين الشكل المجاور مثلثًا قياس إحدى زواياه $\frac{\pi}{4}$ rad ومقابلها ضلع طوله 2cm.

01 أثبت أن مساحة المثلث A تعطى بالاقتران $A = \sin 2\theta - \cos 2\theta + 1$

02 أجد مجال الاقتران في السؤال السابق.

03 أثبت أن أكبر مساحة ممكنة للمثلث هى $(2\sqrt{\ }+ 1)\ cm^2$



الحل

$$A = \frac{1}{2} \cdot 2x \cdot \sin\theta$$

$$A = x \sin\theta$$

$$\Phi + \theta + \frac{\pi}{4} = \pi$$

$$\Phi = \frac{3\pi}{4} - \theta$$

$$\frac{x}{\sin(\frac{3\pi}{4} - \theta)} = \frac{2}{\sin\frac{\pi}{4}}$$

$$x = \frac{2}{\sin\frac{\pi}{4}} \sin(\frac{3\pi}{4} - \theta)$$

$$x = 2\sqrt{2}\ \sin(\frac{3\pi}{4} - \theta)$$

$$\rightarrow A = 2\sqrt{2}\ \sin(\frac{3\pi}{4} - \theta) . \sin\theta$$

$$= 2\sqrt{2} \sin\theta(\sin\frac{3\pi}{4}\cos\theta - \cos\frac{3\pi}{4}\sin\theta)$$

$$= 2\sqrt{2}\ \sin\theta\ (\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta + \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta)$$

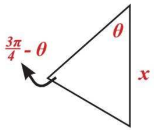
$$= 2\sin\theta\cos\theta + 2\sin^2\theta$$

$$= 2\sin\theta\cos\theta + \sin^2\theta + \sin^2\theta$$

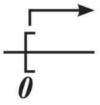
$$= 2\sin\theta\cos\theta + \sin^2\theta + 1 - \cos^2\theta$$

$$= 2\sin\theta\cos\theta - (\cos^2\theta - \sin^2\theta) + 1$$

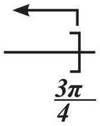
$$= \sin 2\theta - \cos 2\theta + 1$$



$$\theta \geq 0 \rightarrow$$



$$\frac{3\pi}{4} - \theta \geq 0 \rightarrow$$



أكبر مساحة

$$A = \sin 2\theta - \cos 2\theta + 1$$

$$A' = 2\cos 2\theta + 2\sin 2\theta = 0$$

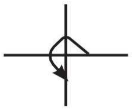
$$\div 2\cos 2\theta \rightarrow 1 + \tan 2\theta = 0$$

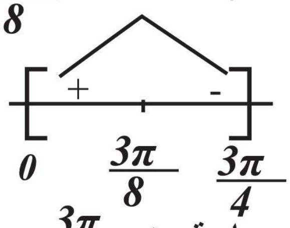
$$\theta \in [0, \frac{3\pi}{4}]$$

$$\tan 2\theta = -1 \rightarrow 2\theta \in [0, \frac{3\pi}{2}]$$

$$2\theta = \frac{3\pi}{4}$$

$$\theta = \frac{3\pi}{8}$$





أكبر مساحة عند $\frac{3\pi}{8}$

$$\rightarrow A = \sin 2\frac{3\pi}{8} - \cos 2\frac{3\pi}{8} + 1$$

$$\rightarrow A = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + 1 = \frac{2}{\sqrt{2}} + 1$$

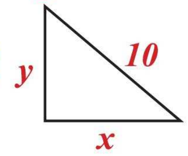
$$A = \sqrt{2} + 1$$

سؤال

جد القيمة العظمى لمساحة مثلث قائم الزاوية طول وتره 10 cm .

الحل

طريقة 1

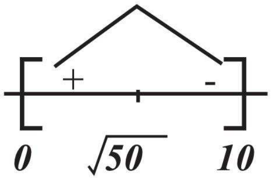


$$A = \frac{1}{2} x\, y = \frac{1}{2} x \overset{\text{فيثاغورس}}{\sqrt{100 - x^2}} \qquad x \in [0 , 10]$$

$$A' = \frac{1}{2} x \frac{-2x}{2\sqrt{100 - x^2}} + \sqrt{100 - x^2} \cdot \frac{1}{2}$$

$$A' = \frac{-x^2}{2\sqrt{100 - x^2}} + \frac{\sqrt{100 - x^2}}{2} = \frac{-x^2 + 100 - x^2}{2\sqrt{100 - x^2}}$$

$$A' = \frac{100 - 2x^2}{2\sqrt{100 - x^2}} \begin{cases} \overset{= 0}{\longrightarrow} x = \sqrt{50} \\ \longrightarrow x = 10 \end{cases}$$



أكبر ما يمكن عند $x = \sqrt{50}$

$$A = \frac{1}{2}\sqrt{50}\sqrt{100 - (\sqrt{50})^2} \longrightarrow \boxed{A = 25}$$

طريقة 2

$$A = \frac{1}{2} x .10 .\sin\theta \qquad \frac{x}{10} = \cos\theta$$

$$A = \frac{1}{2}(10. \cos\theta)(10 \sin\theta) \qquad x = 10 \cos\theta$$

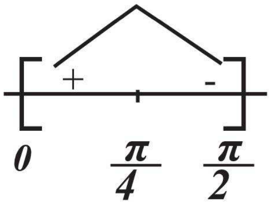
$$A = 50 \sin\theta \cos\theta \qquad A' = 50 \sin\theta (- \sin\theta) + \cos\theta (50 \cos\theta)$$

$$\boxed{A' = 50 (\cos^2\theta - \sin^2\theta)} = 0$$

$+\cos^2\theta$

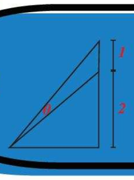
$$\longrightarrow 1 - \tan^2\theta \longrightarrow \tan\theta = \pm 1 \longrightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$$

$$\longrightarrow \theta = \frac{\pi}{4} \longrightarrow A = 50 \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{2}} \longrightarrow \boxed{A = 25}$$

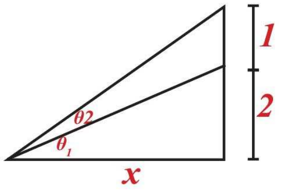


سؤال

نظرت سارة إلى اللوحة المعلقة على حائط منزلها ارتفاعها 1 m ، اتفاع حافتها السفلية 2m فوق عينها كما فى الشكل المجاور ، كم يجب أن تبعد سارة عن الجدار لتكون زاوية نظرها θ اكبر ما يمكن ؟



الحل



$$\theta = \theta_2 - \theta_1$$

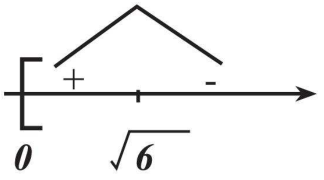
$$\tan\theta = \tan(\theta_2 - \theta_1)$$

$$\tan\theta = \frac{\tan\theta_2 - \tan\theta_1}{1 + \tan\theta_2 \tan\theta_1}$$

$$\tan\theta = \frac{\frac{3}{x} - \frac{2}{x}}{1 + \frac{3}{x}\,\frac{2}{x}} = \frac{\frac{1}{x}}{\frac{x^2+6}{x^2}} = \frac{x}{x^2+6}$$

$$\tan\theta = \frac{x}{x^2+6} \xrightarrow[\text{إلى } x]{\text{أشتقت بالنسبة}} \sec^2\theta . \frac{d\theta}{dx} = \frac{(x^2+6)(1)-1x(2x)}{(x^2+6)^2}$$

$$\theta' = \cos^2\theta.\ \frac{6-x^2}{(x^2+6)^2} \longrightarrow x = \sqrt{3}$$



$$\boxed{x = \sqrt{6}}$$

سؤال

يبيع تاجر 200 تنكة زيت شهريا بسعر 90 دينار ولاحظ أن عدد التنكات المبيعه يزداد شهرياً بمعدل 20 تنكة عند خصم 5 دنانير من سعر التنكة. فما السعر المناسب لتحقيق أعلي ايراد

p(x) = (العدد) × (السعر) = $(200 + 20x)(90 - 5x)$

$$p(x) = 18000 - 100x^2 + 800x$$

$$p'(x) = -200x + 800 = 0 \longrightarrow \boxed{x = 4}$$

السعر = 90 - 5(4) =70 دينار

سؤال

تتنج مزرعة للتفاح 30 صندوقًا من الشجرة الواحدة تقريبًا عند زراعة 20 شجرة في كل فدان من الأرض و يقل إنتاج الشجرة الواحدة بمقدار صندوق عند زراعة شجرة إضافية في كل فدان بسبب قرب الأشجار الشديد من بعضها البعض. ما عدد الاشجار التي يجب زراعتها في كل فدان لتحقق أكبر إنتاج مُمكن؟؟

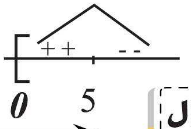
الحل

الانتاج لكل شجرة . العدد = الانتاج

$= (20 + x)\ (30 - x)$

$f(x) = 600 - x^2 + 10x \longrightarrow \boxed{f'(x) = -2x + 10} = 0$

$f' \longrightarrow x = 5$



← أكبر انتاج عند زراعة 5+ 20 ← شجرة 25

سؤال

لاحظت إدارة أحد المسارح أن متوسط عدد الحضور لعرض ما هو 1000 شخص إذا كان سعر بيع التذكرة 26 دينار ، و ان عدد الحضور يزيد بمقدار 50 شخصاً مقابل كل دينار يخصم من سعر التذكرة إذا كان متوسط ما ينفقه كل شخص 4 دينار على الخدمات داخل المسرح ، فما سعر بيع التذكرة الذي يحقق للمسرح أعلى إيراد

الحل

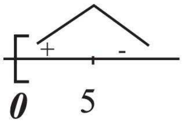
R(*x*) = ايراد التذاكر + ايراد الانفاق

R(*x*) = (سعر التذكرة × عدد الاشخاص)+(انفاق الشخص × عدد الاشخاص)

$R(x) = (1000 + 50x)(26-x) + (1000+50x)(4)$

$R(x) = -50x^2 + 500x + 30000$

$R'(x) = -100x + 500 = 0 \longrightarrow x = 5$



إذن أعلى ربح عند سعر التذكرة 21 = 5 -26

سؤال

وجد مصنع أثاث أن التكلفة الكلية بالدينار لانتاج غرف نوم عددها x تقدر بالاقتران c(x) = x³ - 3x² - 8x + 500فإذا بيعت كل غرفة نوم ب 2800 دينار فما هو عدد الغرف التي يجب أن تنتجها المصنع ليحقق أكبر ربح

الحل

الايراد = العدد السعر

$R(x) = (x)\ (2800) \longrightarrow \boxed{R(x) = 2800\,x}$

الربح = الايراد تكلفة

$P(x) = R(x) - c(x)$

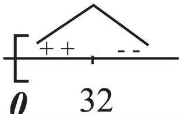
$P(x) = 2800\,x - (x^3 - 3x^2 - 80x + 500)$

$P(x) = 2880 - x^3 + 3x^2 - 500$

$P'(x) = 2880 - 3x^2 + 6x = 0 \longrightarrow x^2 - 2x - 960 = 0$

$(x - 32)\ (x + 30) = 0$

$x = 32$ عدد القطع 32 قطعة



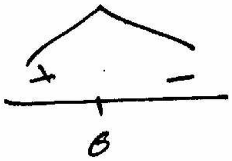
2023
جيل 2005

إذا كان: $R(x) = -50x^2 + 200(3x + 160)$ يمثّل اقتران الإيراد الكلي بالدينار من بيع x صندوقًا، فإنّ أعلى إيراد يُمكن تحقيقه بالدينار هو:

a) 35600 b) 11400 c) 33800 d) 35300

الحل $R'(x) = -100x + 200(3) = 0$

$$x = \frac{-600}{-100} = 6$$



$$R(6) = -50(6^2) + 200(3(6) + 160) = 33800$$

$\boxed{c}$

2023
جيل 2005

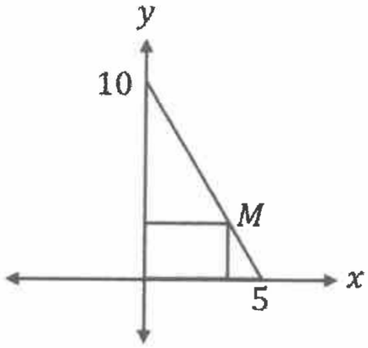
معتمدًا الشكل الآتي الذي يمثل مستطيلاً مرسومًا داخل مثلث قائم الزاوية. ما قيمة الإحداثي x للنقطة M التي تكون عندها مساحة المستطيل أكبر ما يمكن؟

a) $\frac{3}{4}$

b) $\frac{3}{2}$

c) $\frac{5}{4}$

d) $\frac{5}{2}$



الحل $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{10-0}{0-5} = -2$

$$y - y_1 = m(x - x_1) \Rightarrow y - 10 = \overset{-2}{\cancel{m}}(x - 0)$$

$$\boxed{y = 10 - 2x}$$

$A =$ العرض . الطول $= x \cdot y = x(10 - 2x) = 10x - 2x^2$

$\boxed{A' = 10 - 4x} = 0 \Rightarrow x = \frac{10}{4} \Rightarrow \frac{5}{2}$ $\boxed{d}$

الأعداد المركبة و

$\sqrt{-72}$ يساوي

a) $6\sqrt{2}$ b) $-6\sqrt{2}$ c) $-6i\sqrt{2}$ d) $6i\sqrt{2}$

الحل $\sqrt{-72} = \sqrt{-1}\sqrt{72} = i\sqrt{72} = i\sqrt{36}\sqrt{2}$
$= 6i\sqrt{2} \Rightarrow \boxed{d}$

$\sqrt{-9}\sqrt{-4}$ يساوي

a) 6 b) -6 c) $6i$ d) $-6i$

الحل $3i \cdot 2i = 6i^2 = -6 \Rightarrow \boxed{b}$

i^{217} تساوي

a) 1 b) -1 c) i d) $-i$

$i^{216} \cdot i = (i^2)^{108} i = (-1)^{108} i = i \Rightarrow \boxed{c}$

z عدد مركب ، حاصل جمع جزءه الحقيقي مع جزءه التخيلي 3 ،
و $Re(z) = 2Im(z)$ ، هذا العدد هو :

a) $1+2i$ b) $2+i$ c) $2-i$ d) $3+6i$

$z = \underset{\text{حقيقي}}{a} + i\underset{\text{تخيلي}}{b} \Rightarrow \begin{matrix} a+b=3 \\ a=2b \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} 2b+b=3 \\ \boxed{b=1} \\ a=2 \end{matrix} \Rightarrow 2+i \Rightarrow \boxed{b}$

②

تذكّر

الاعداد التخيلية (i) : $\sqrt{-2}$, $3i$, $\frac{-\sqrt{5}}{\sqrt{3}} i$

الاعداد الحقيقية (R)

نسبية (Q) ← $\frac{3}{2}$, $\frac{-1}{5}$, $\overbrace{\underbrace{3 , -2}_{\text{الصحيحة } (Z)} , 0}^{\text{الكلية } W}$

غير نسبية (I) ← $\sqrt{2}$, $0.07007007...$

الاعداد المركبة : كل شيء

أي مما يلي عدد تخيلي

a) $\sqrt{7}$ b) $3+2i$ c) $-i$ d) $(i)^2$

الجواب $-i \Rightarrow \boxed{c}$

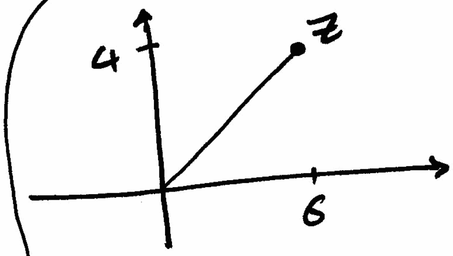
الصورة القياسية للعدد المركب $\frac{8+\sqrt{-16}}{2i}$ هي

a) $4+2i$ b) $-4-2i$ c) $4-2i$ d) $2-4i$

الحل

$$\frac{8+4i}{2i} \cdot \overset{\text{المرافق}}{\frac{-2i}{-2i}} = \frac{-16i - 8(i)^2}{4}$$

$$= -4i + 2 = 2-4i \Longrightarrow \boxed{d}$$



للعدد z الممثل في الشكل المجاور فإن $\overline{z} + Im(z)$ تساوي

a) 10−4i   b) 6+8i   c) 6   d) 0

الحل $z = 6+4i$
$\overline{z} = 6-4i$ $\Rightarrow \overline{z} + Im(z)$
$= 6-4i+4 = 10-4i \Rightarrow \boxed{a}$

وإذا كان $z+\overline{z} = 6$ و $z \cdot \overline{z} = 13$ ، $Im(z)>0$ ، فإن $\overline{z}$ تساوي

a) 3+2i   b) 3−2i   c) 2+3i   d) 3i

الحل $(a+ib)+(a-ib) = 2a = 6 \Rightarrow \boxed{a=3}$

$(a+ib)(a-ib) = a^2+b^2 = 13$

$9+b^2 = 13 \Rightarrow \boxed{b=\pm 2} \xrightarrow{Im\, z>0} \boxed{b=2}$

$\Rightarrow z = 3+2i \longrightarrow \boxed{\overline{z} = 3-2i}$ (b)

برهن أن $z\overline{z} = |z|^2$

$z\overline{z} = (a+ib)(a-ib) = a^2+b^2 = |z|^2$

وإذا كان $z = \frac{4}{\overline{z}}$ ، فإن $|z|$ يساوي

a) 4   b) 16   c) 2   d) $\sqrt{2}$

$z\overline{z} = 4 \Rightarrow |z|^2 = 4 \longrightarrow |z| = 2 \Longrightarrow \boxed{c}$

④

إذا كان z عدد مركب حيث $|z|=5$ و $z-\bar{z}=8i$
فإن z يساوي

a) $3+4i$
 $3-4i$ b) $3+4i$
 $-3+4i$ c) $3+4i$
 $-3-4i$ d) $3+2i$
 $3-2i$

الحل $(a+ib)-(a-ib)=8i \Longrightarrow 2b\,i=8i \longrightarrow \boxed{b=4}$

$$|z|=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{a^2+4}=5 \longrightarrow a^2=9 \Rightarrow a=\pm 3$$

$$\Longrightarrow \pm 3+4i \Longrightarrow \boxed{b}$$

س) إذا كان x و y أعداد حقيقية، حيث $(3x-y)+2iy=6i$
فإن قيمة $\frac{x}{y}$ هي

a) 3 b) $\frac{1}{3}$ c) 0 d) 2

الحل $2y=6 \Longrightarrow y=3$

$$3x-y=0 \Longrightarrow 3x-3=0 \Longrightarrow x=1 \Longrightarrow \frac{x}{y}=\frac{1}{3} \Longrightarrow \boxed{b}$$

إذا كان x و y أعداد مركبة، حيث $x+y=4$
$ix+y=6i$
فإن قيمة x هي

a) $5-i$ b) 6 c) 4 d) $6+4i$

① معادلة ② عوض في معادلة

الحل $y=4-x \Longrightarrow ix+(4-x)=6i \Longrightarrow ix-x=6i-4$

$$\Longrightarrow -x+ix=6i-4 \Longrightarrow x(-1+i)=6i-4$$

$$x=\frac{6i-4}{-1+i}\,\frac{-1-i}{-1-i}=\frac{-6i+6+4+4i}{(1)^2+(1)^2}=\frac{-2i+10}{2}$$

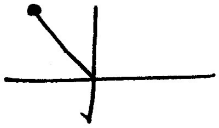
$$=5-i \Longrightarrow \boxed{a}$$

⑤

سعة العدد المركب $Z=-3+i$ هي

a) $\tan^{-1}3$ b) $-\tan^{-1}3$ c) $\pi-\tan^{-1}3$ d) $\pi-\tan^{-1}(\frac{1}{3})$

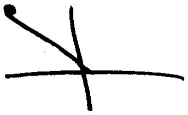
الحل



$\pi-\tan^{-1}\frac{1}{3} \Longrightarrow \boxed{d}$

سعة العدد المركب $Z=-3+i$ هي

a) 2.8 b) 1.9 c) 1.2 d)



$\pi-\tan^{-1}\frac{1}{3} = \pi - 0.32 = 2.8$ rad $\boxed{a}$

$(\tan^{-1}(\frac{1}{3})\cdot\frac{\pi}{180})$

درجه

سعة العدد المركب $Z=-3+i$ هي

a) $\tan^{-1}3$ b) $\tan^{-1}\frac{1}{3}$ c) $\frac{\pi}{2}+\tan^{-1}3$ d) $\frac{\pi}{2}-\tan^{-1}3$

الحل $\pi-\tan^{-1}\frac{1}{3} = \pi-(\frac{\pi}{2}-\tan^{-1}3)$

$= \frac{\pi}{2}+\tan^{-1}3$

تذكر

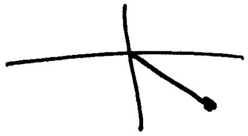
للضع دائره

$$\tan^{-1}\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}-\tan^{-1}x$$

⑥

$\text{Arg}(3-\sqrt{3}i)$ تساوي

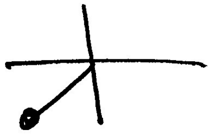
a) $\frac{\pi}{3}$ b) $-\frac{\pi}{3}$ c) $\frac{\pi}{6}$ d) $-\frac{\pi}{6}$



$$-\tan^{-1}\frac{\sqrt{3}}{3} = -\tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\pi}{6} \Longrightarrow \boxed{d}$$

إذا كان $\text{Arg}(a+ib)=\alpha$ ، فإن $\text{Arg}(-a-ib)$ ~~Arg~~ تساوي

a) $\frac{\pi}{2}+\alpha$ b) α c) $\pi+\alpha$ d) $-\pi+\alpha$



$$= -(\pi-\alpha) = -\pi+\alpha \Longrightarrow \boxed{d}$$

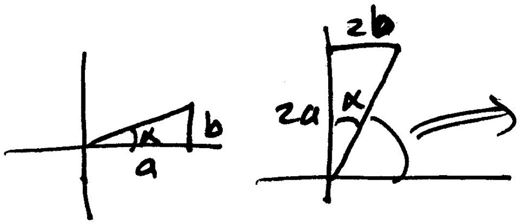
إذا كان $\text{Arg}(a+ib)=\alpha$ ، فإن $\text{Arg}(2b+2ai)$ تساوي

a) $\frac{\pi}{2}-\alpha$ b) $\frac{\pi}{2}+\alpha$ c) $\alpha-\frac{\pi}{2}$ d) 2α

$$\text{Arg}(a+ib)=\alpha \Rightarrow \tan^{-1}\frac{b}{a}=\alpha$$

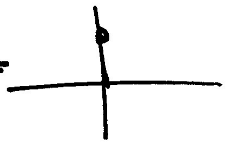
$$\text{Arg}(2b+2ai) = \tan^{-1}\frac{2a}{2b} = \tan^{-1}\frac{a}{b} = \frac{\pi}{2}-\alpha \Longrightarrow \boxed{c}$$

(لو كانت السؤال حل) $\longrightarrow$

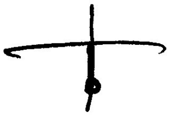


$\Longrightarrow \frac{\pi}{2}-\alpha$

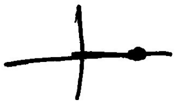
⑦

$\frac{\pi}{2} \Leftarrow$ 

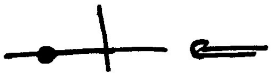
سعة i = - - -

$-\frac{\pi}{2} \Leftarrow$ 

سعة $-i$ = - - -

$0 \Leftarrow$ 

سعة 5 = - - -

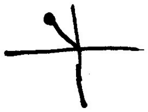
$\pi \Leftarrow$ 

سعة -3 = - - -

إذا كان $z=-2+2i$ ، فإن سعة $\bar{z}$ هي

a) $\frac{\pi}{4}$ b) $\frac{3\pi}{4}$ c) $-\frac{\pi}{4}$ d) $-\frac{3\pi}{4}$

$$\boxed{\operatorname{Arg}\bar{z} = -\operatorname{Arg} z} = -\operatorname{Arg}(-2+2i)$$



$$= -\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{3\pi}{4} \Rightarrow \boxed{d}$$

إذا كان $2\operatorname{Arg} z - \operatorname{Arg}\bar{z} = \pi$ ، فإن $\operatorname{Arg} z$ تساوي

a) π b) $\frac{\pi}{3}$ c) $\frac{\pi}{2}$ d) $\frac{\pi}{4}$

$$2\operatorname{Arg} z - (-\operatorname{Arg} z) = \pi$$

$$3\operatorname{Arg} z = \pi \Longrightarrow \boxed{\operatorname{Arg} z = \frac{\pi}{3}} \Longrightarrow \boxed{b}$$

8

اذا كان $|Z| = 10$ و $\text{Arg}\, Z = \frac{\pi}{3}$ ، فإن Z بالصورة المثلثية يساوي

a) $10\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$ b) $5 + 5\sqrt{3}\,i$ c) .. d) ..

$$Z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = 10\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) \Rightarrow \boxed{a}$$

اذا كان $|Z| = 10$ و $\text{Arg}\, Z = \frac{\pi}{3}$ ، فإن Z بالصورة القياسية يساوي

a) $10\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$ b) $5 + 5\sqrt{3}\,i$ c) .. d) ..

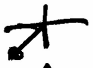
الحل $Z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = 10\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

$$= 10\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 5 + \sqrt{3}.5\,i \Rightarrow \boxed{b}$$

اكتب العدد $Z = -2 - i\sqrt{12}$ بالصورة المثلثية

2023
جيل 2005

$$r = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{(-2)^2 + (-\sqrt{12})^2} = 4$$



$$\theta = -\left(\pi - \tan^{-1}\frac{b}{a}\right) = -\left(\pi - \tan^{-1}\frac{\sqrt{12}}{2}\right) \longrightarrow \frac{\sqrt{12}}{2} = \frac{\sqrt{4\cdot 3}}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{\cancel{2}} = \sqrt{3}$$

$$= -\left(\pi - \tan^{-1}\sqrt{3}\right) = -\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{2\pi}{3}$$

$$Z = r(\cos\theta + i\sin\theta) \Rightarrow \boxed{Z = 4\left(\cos -\frac{2\pi}{3} + i\sin -\frac{2\pi}{3}\right)}$$

⑨

س

Z_1 عدد مركب مقياسه $\sqrt{40}$ وسعته $\tan^{-1}3$

① اكتب Z بالصورة القياسية

② جد مساحة المثلث المكون من Z_1 & Z_2 و Z_3

حيث $Z_2 = i\bar{Z}_1$ & $Z_3 = 1-i$

$$Z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = \sqrt{4}\left(\cos(\tan^{-1}3) + i\sin(\tan^{-1}3)\right)$$

$$\theta = \tan^{-1}3 \Rightarrow \tan\theta = 3 \Longrightarrow \sec^2\theta = 1+\tan^2\theta = 1+3^2 = 10$$

$$\Rightarrow \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{10}}$$

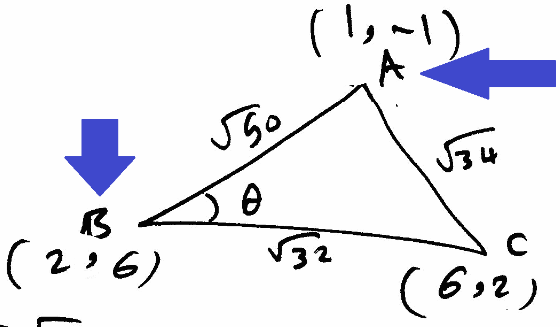
$$\sin^2\theta + \underset{\left(\frac{1}{\sqrt{10}}\right)^2}{\cancel{\cos^2\theta}} = 1 \longrightarrow \boxed{\sin\theta = \frac{3}{\sqrt{10}}}$$

$$\Rightarrow Z = \sqrt{40}\left(\frac{1}{\sqrt{10}} + \frac{3}{\sqrt{10}}i\right) = 2+6i$$

$$\boxed{Z_1 = 2+6i}$$

$$Z_2 = i\bar{Z}_1 = i(2-6i) = \boxed{Z_2 = 6+2i}$$

$$\boxed{Z_3 = 1-i}$$



$$\overline{AB} = \sqrt{(2-1)^2 + (6+1)^2} = \sqrt{50}$$

$$\overline{BC} = \sqrt{(6-2)^2 + (6-1)^2} = \sqrt{32}$$

$$\overline{AC} = \sqrt{(6-1)^2 + (2+1)^2} = \sqrt{34}$$

قانون جيب التمام

$$\sqrt{34}^2 = \sqrt{50}^2 + \sqrt{32}^2 - 2\sqrt{50}\sqrt{32}\cos\theta$$

$$\Rightarrow \cos\theta = 0.6 \Longrightarrow \ldots \boxed{\sin\theta = 0.8}$$

$$A = \frac{1}{2}\sqrt{32}\sqrt{50}\,0.8$$

$$\boxed{A = 16}$$

⑩

قيمة $i(2-i)^2$ هي

a) $3+4i$ b) $3-4i$ c) $4+3i$ d) $4-3i$

الحل $i(2-i)^2 = i(4-4i+(i)^2) = i(3-4i) = 3i+4$

$= 4+3i$ $\boxed{c}$

سعة $\frac{3+i}{1+3i}$ هي

a) 0.93 b) −0.93 c) 2.2 d) −2.2

الحل $\frac{3+i}{1+3i}\,\frac{1-3i}{1-3i} = \frac{3-9i+i+3}{1+9} = \frac{6}{10} - \frac{8}{10}i$

$\theta = -\tan^{-1}\left(\frac{8/10}{6/10}\right) = -\tan^{-1}\left(\frac{4}{3}\right) = -0.93$ $\boxed{b}$

مقياس $\frac{3+i}{1+3i}$ هو

a) $\frac{1}{10}$ b) $+1$ c) 10 d) $\sqrt{10}$

الحل طريقة ① $\frac{3+i}{1+3i}\,\frac{1-3i}{1-3i} = \cdots = 0.6 - 0.8i$

$|z| = \sqrt{(0.6)^2+(0.8)^2} = 1$

طريقة ② $\left|\frac{3+i}{1+3i}\right| = \frac{|3+i|}{|1+3i|} = \frac{\sqrt{9+1}}{\sqrt{1+9}} = 1 \longrightarrow \boxed{b}$

⑪

تذكر

$$\operatorname{Arg}\left(\frac{z}{w}\right) = \operatorname{Arg} z - \operatorname{Arg} w \quad \& \quad \left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|}$$

$$\operatorname{Arg}(z\cdot w) = \operatorname{Arg} z + \operatorname{Arg} w \quad \& \quad |z\cdot w| = |z||w|$$

أثبت أن $\frac{1+3i}{1+i} = 2+i$

ثم بالاعتماد عليها أثبت أن $\tan^{-1}3 = \frac{\pi}{4} + \tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$

أولاً $\frac{1+3i}{1+i}\cdot\frac{1-i}{1-i} = \frac{1-i+3i+3}{2} = \frac{4+2i}{2} =$

ثانياً $\operatorname{Arg}\left(\frac{1+3i}{1+i}\right) = \operatorname{Arg}(2+i)$

$$\operatorname{Arg}(1+3i) - \operatorname{Arg}(1+i) = \operatorname{Arg}(2+i)$$

$$\tan^{-1}3 - \tan^{-1}1 = \tan^{-1}\tfrac{1}{2}$$

$$\tan^{-1}3 - \frac{\pi}{4} = \tan^{-1}\tfrac{1}{2} \longrightarrow \boxed{\tan^{-1}3 = \frac{\pi}{4} + \tan^{-1}\tfrac{1}{2}}$$

إذا كان $\operatorname{Arg} z = \frac{\pi}{5}$ ، فإن $\operatorname{Arg}\left(\frac{-i}{z}\right)$ يساوي

a) 0.6π b) -0.6π c) 0.7π d) -0.7π

الحل $\operatorname{Arg}(-i) - \operatorname{Arg} z = -\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{5} = -\frac{7\pi}{10} \Longrightarrow \boxed{d}$

⑫

إذا كان $\left|\frac{z}{1+i}\right|=\sqrt{8}$ ، $Arg\left(\frac{z}{\bar{z}}\right)=\frac{\pi}{3}$ فإن z تساوي

a) $2\sqrt{3}+2i$ b) $2+2\sqrt{3}i$ c) $4+i$ d) $2-\sqrt{3}i$

الحل $\frac{|z|}{|1+i|}=\sqrt{8} \Rightarrow |z|=\sqrt{2}\sqrt{8}=4$

$$Arg z - Arg \bar{z} = Arg z + Arg z = 2 Arg z = \frac{\pi}{3}$$

$$Arg z = \frac{\pi}{6}$$

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = 4\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$$

$$= 4\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right) = 2\sqrt{3}+2i \Longrightarrow$$

تذكر

$$r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)\cdot r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$$
$$= r_1 r_2 \quad \cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)$$

$$\frac{r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)}{r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)} = \frac{r_1}{r_2}\left(\cos(\theta_1-\theta_2) + i\sin(\theta_1-\theta_2)\right)$$

س إذا كان $z=\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)$ ، $w=3\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$؟ فإن $\frac{w}{z}$ تساوي

$$\frac{w}{z} = \frac{3}{1}\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{2}\right)\right) = 3\left(\cos\frac{-\pi}{6} + i\sin\frac{-\pi}{6}\right)$$

س | إذا كان $z = \cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}$ و $w = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

فإن $w \cdot z$ تساوي بالصورة المثلثية - ——

$$wz = 2 \cdot 1\left(\cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{5\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3} + \frac{5\pi}{6}\right)\right)$$

$$= 2\left(\cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6}\right)$$

خارج الفترة $(-\pi, \pi]$

$\Leftarrow$ نطرح 2π

$$= 2\left(\cos\left(-\frac{5\pi}{6} + i\sin -\frac{5\pi}{6}\right)\right)$$

س | إذا كان $z = \cos\phi - i\sin\phi$ ، أثبت أن

$z^3 = \cos -3\phi + i\sin -3\phi$

الحل $z = \cos\phi - i\sin\phi = \cos(-\phi) + i\sin(-\phi)$

$$z^3 = z \cdot z \cdot z$$

$$= 1 \cdot 1 \cdot 1 \ \cos(-\phi + -\phi + -\phi) + i\sin(-\phi + -\phi + -\phi)$$

$$= \cos(-3\phi) + i\sin(-3\phi)$$

س | إذا كان $z = \cos\theta + i\sin\theta$ ، فإن $z\bar{z}$ يساوي

a) $\cos 2\theta$ b) $-\cos 2\theta$ c) 1 d) -1

الحل $(\cos\theta + i\sin\theta)(\cos\theta - i\sin\theta) = \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1 \Rightarrow \boxed{c}$

جد الجذرين التربيعيين للعدد المركب $\frac{7+i}{1-i}$

الحل $\frac{7+i}{1-i}\cdot\frac{1+i}{1+i} = 7+7i+i-1 = \frac{6+8i}{2} = 3+4i$

$$\sqrt{3+4i} = x+iy$$

$$3+4i = (x^2-y^2)+2xyi$$

$2xyi = 4 \Rightarrow y = \frac{2}{x} \Longrightarrow x^2-\left(\frac{2}{x}\right)^2 = 3$

$x^2-y^2 = 3$

$x^4-4 = 3x^2 \Rightarrow x^4-3x^2-4=0$

$\Rightarrow (x^2-4)(x^2+1)=0$

$\Rightarrow x = \pm 2$

$x=2 \Longrightarrow y=\frac{2}{2}=1 \Longrightarrow 2+i$

$x=-2 \Longrightarrow y=\frac{2}{-2}=-1 \Longrightarrow -2-i \Longrightarrow \boxed{\pm(2+i)}$

إذا علمت أن $\pm(a+3i)$ هما جذرا العدد $-5+12i$ ، فإن a تساوي:
(حيث a عدد حقيقي)

a) 2 b) −2 c) 6 d) −6

الحل $\sqrt{-5+12i} = \pm(a+3i) \Longrightarrow -5+12i = (a+3i)$

$\Rightarrow -5+12i = (a^2-9)+6ai$

$a^2-9=-5 \Rightarrow a^2=4 \Rightarrow a=\pm 2$

$6a=12 \Rightarrow a=2 \Longrightarrow$ المشترك $\boxed{a=2} \Longrightarrow \boxed{a}$

اذا علمت أن $((n+1)+(n-1)i)^2 = 8+im$ ، حيث n و m حقيقية

① ما قيمة m ،

② بالاعتماد على الفرع السابق ما قيمة $\sqrt{8+6i}$

الحل $((n+1)^2-(n-1)^2)+2(n+1)(n-1)i = 8+im$

$(n^2+2n+1)-(n^2-2n+1)+(2n^2-2)i = 8+im$

$4n+(2n^2-2)i = 8+im$

$4n = 8 \Longrightarrow \boxed{n=2} \Longrightarrow m = 2n^2-2$

$= 2(2)^2-2 = 6 \Longrightarrow \boxed{m=6}$

$n=2$, $m=6$ $\Longrightarrow ((2+1)+(2-1)i)^2 = 8+6i$

$(3+i)^2 = 8+6i$

$\Longrightarrow \pm(3+i) = \sqrt{8+6i}$

$\Longrightarrow \sqrt{8+6i} = \pm(3+i)$

p و q عددان صحيحان موجبان $p > q$

$Re(p+iq)^2 = 45$ ، فما قيم p و q الممكنة

الحل $Re((p^2-q^2)+2pqi) = 45$

$\Rightarrow p^2-q^2 = 45$

$\Rightarrow (p-q)(p+q) = 45$

تجزيد

$1 \cdot 45 \Longrightarrow$ $p-q=1$, $p+q=45$ $\Longrightarrow$ $p=23$, $q=22$

$3 \cdot 15 \Longrightarrow$ $p-q=3$, $p+q=15$ $\Longrightarrow$ $p=9$, $q=6$

$5 \cdot 9 \Longrightarrow$ $p-q=5$, $p+q=9$ $\Longrightarrow$ $p=7$, $q=2$

حل المعادلة $z^2+2z=-10$ هو

a) $\pm(1+3i)$　b) $\pm(1-3i)$　c) $1\pm3i$　d) $-1\pm3i$

الحل $z^2+2z+10=0 \Rightarrow z=\frac{-2\pm\sqrt{4-40}}{2(1)}=\frac{-2\pm6i}{2}=-1\pm3i\ \boxed{d}$

المعادلة التي أحد جذريها $3-4i$ هي

a) $z^2-6z+25=0$　b) $z^2+6z+25=0$

c) $z^2-6z-9=0$　d) $z^2+6z-7=0$

توافق

الحل $z=3\pm4i \Rightarrow (z-3)=\pm4i \Rightarrow (z-3)^2=(\pm4i)^2$

$z^2-6z+9=-16 \Rightarrow \boxed{z^2-6z+25=0}$

العدد المركب الذي أحد جذريه $3-4i$ هو

a) $25-24i$　b) $-7-24i$　c) $7-24i$　d) $-24+4i$

تناظري

الحل $\sqrt{z}=\pm(3-4i) \Rightarrow (\sqrt{z})^2=(3-4i)^2$

$z=9-24i-16$

$z=-7-24i \Rightarrow \boxed{b}$

إذا كان $z=2+i$ هو أحد جذري المعادلة $2z^2-az+b=0$ فجد قيم a و b

$z=2\pm i \Rightarrow (z-2)^2=(\pm i)^2 \Rightarrow z^2-4z+4=-1$

$z^2-4z+5=0 \Rightarrow 2z^2-8z+10=0$

$\boxed{a=8}$　$\boxed{b=10}$

حل المعادلة $x^3+x^2+15x-225=0$ ، علماً أن $x=5$ هو أحد جذورها

الحل

$$\begin{array}{r|l} & x^2+6x+45 \\ \hline x-5 & x^3+x^2+15x-225 \\ & x^3-5x^2 \\ \hline & 6x^2+15x-225 \\ & 6x^2-30x \\ \hline & 45x-225 \\ & 45x-225 \\ \hline & 0 \end{array}$$

$(x-5)(x^2+6x+45)=0$

$\swarrow$

$x=5$

$\Delta = b^2-4ac = 36-4(1)(45) = 36-180$
$= -144$

$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-6 \pm \sqrt{-144}}{2(1)} = \frac{-6 \pm 12i}{2}$

$\boxed{x = -3 \pm 6i}$ $\boxed{x=5}$

رؤوسه

جد مساحة المستطيل المكون من الجذرين غير الحقيقيين في السؤال السابق ونظيريهما الجمعيين

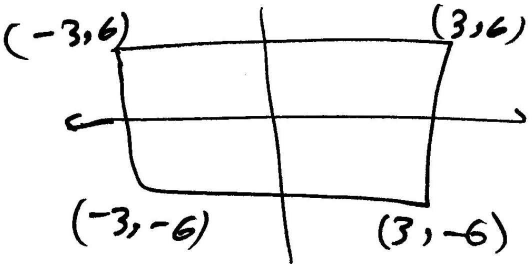
الرؤوس $x = (-3 \pm 6i) \Longrightarrow -3+6i$

$-3-6i$

$x = -(-3 \pm 6i)$

$3+6i$

$-3-6i$



المساحة $= \Delta x \cdot \Delta y$
$= (3--3)(6--6)$
$= 6 \cdot 12$
$= \boxed{72}$

(١٤٧

العدد المركب $z=(10-i)-(2-7i)$ هو أحد جذور المعادلة $z^3-20z^2+164z=400$ ، جد بقية الجذور ، ثم حل المعادلة
$x^6+164x^2=20(x^4+20)$

الحل $z=8+6i \Rightarrow z=8\pm 6i \Rightarrow (z-8)^2=(\pm 6i)^2$

$z^2-16z+64=-36 \Rightarrow \boxed{z^2-16z+100=0}$

$$\begin{array}{r|l} & z-4 \\ \hline z^2-16z+100 & z^3-20z^2+164z-400 \\ & z^3-16z^2+100z \\ \hline & -4z^2+64z-400 \\ & -4z^2+64z-400 \\ \hline & 0 \end{array}$$

$(z-4)(z^2-16z+100)=0$

$\searrow z=4 \qquad \searrow z=8\pm 6i$

$x^6+\overset{20}{\cancel{164}}x^4+164x^2-400=0$

$(x^2)^3+20(x^2)^2+164x^2-400=0$ $\qquad z=x^2$

$z^3+20z^2+164z-400=0$

من الفرع الاول $\longrightarrow$ $z=4$ أو $z=8+6i$ أو $z=8-6i$

$z=4 \Downarrow x^2=4 \Rightarrow \boxed{x=\pm 2i}$

$z=8+6i \Downarrow x^2=8+6i$, $x=\pm\sqrt{8+6i}$ $\Downarrow$

احسب جذري الرقم

$\cdots \Rightarrow \boxed{x=\pm(3+i)}$

$z=8-6i \Downarrow x^2=8-6i \Downarrow x=\pm\sqrt{8-6i}$

$\boxed{x=\pm(3-i)}$

إذا كان $Z=1+i$ هو أحد حلول المعادلة $ax^3+bx^2-6x+8=0$
حيث $b\&a$ حقيقيان . فما قيم $b\&a$

$a(1+i)^2 = 1+2i-1 = 2i$

$(1+i)^3 = (1+i)^2(1+i) = 2i(1+i) = 2i-2 = -2+2i$

$a(-2+2i)+b(2i)-6(1+i)+8=0$

$(-2a-6+8)+i(2a+2b-6)=0$

$\downarrow(\quad)=0$

$-2a=-2$

$\boxed{a=1}$

$2(1)+2b-6=0$

$2b-4=0$

$\boxed{b=2}$

ما أكبر عدد ممكن من الجذور الحقيقية للمعادلة ax^3+bx^2+cx+d
وما أقل عدد ممكن من = = لنفس المعادلة

اكبر عدد : ③ جذور حقيقية

اقل عدد : ① جذر حقيقي واحد

ما اقل وأكبر عدد ممكن من الجذور الحقيقية للمعادلة $ax^4-bx+c=0$

اقل صفر جذر حقيقي

أكبر 4 جذور حقيقية

إذا علمت أن المحل الهندسي الذي تمثله المعادلة $|z-a+3i|=2a$ هو دائرة مركزها $(2,-3)$ ، فإن نصف قطر هذه الدائرة هو :

a) 2 b) 1 c) 4 d) 16

المركز $(a,-3)\equiv(2,-3) \Longrightarrow a=2$

$|z-2+3i|=2(2) \longrightarrow \boxed{r=4}$ $\boxed{c}$

إذا علمت أن $|z-3+2i|=5$ هي معادلة دائرة فإن الصيغة الديكارتية لهذه المعادلة هي

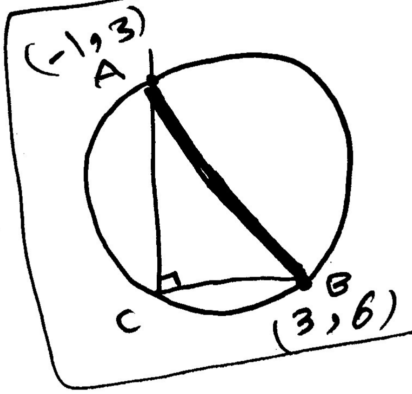
a) $(x-3)^2+(y+2)^2=5$ b) $(x+3)^2+(y-2)^2=5$

c) $(x-3)^2+(y+2)^2=25$ d) --

$|x+iy-3+2i|=5 \Rightarrow |x-3+i(y+2)|=5$

$\sqrt{(x-3)^2+(y+2)^2}=5 \Longrightarrow (x-3)^2+(y+2)^2=25 \Rightarrow \boxed{c}$

معادلة الدائرة المبينة في الشكل المجاور هي :



a) $|2z-2-9i|=5$

b) $|z-2-4i|=5$

c) $|z-1-9i|=5$

بما أن المثلث قائم ← AB قطر

المركز $M\left(\frac{-1+3}{2}, \frac{3+6}{2}\right)=\left(1, \frac{9}{2}\right)$

$2r=\sqrt{(6-3)^2+(3--1)^2} \Longrightarrow 5 \Rightarrow \boxed{r=\frac{5}{2}}$

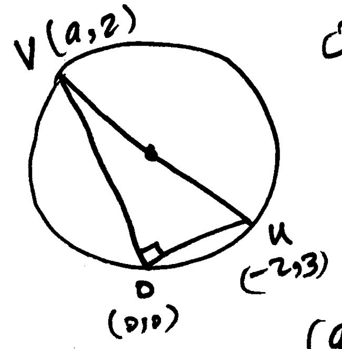
$|z-(1+\frac{9}{2}i)|=\frac{5}{2}$

$|z-1-\frac{9}{2}i|=\frac{5}{2}$

$|2z-2-9i|=5$

اذا كانت $u=-2+3i$ و $v=a+2i$ هما طرفا قطر في دائرة ، وكانت نقطة الاصل (0) تقع على هذه الدائرة .
فجد معادلة هذه الدائرة بصيغة $|z-z_1|=r$

الحل



بما أن VU قطر للدائرة فإن المثلث قائم (نظرية)

⟸ يمكن تطبيق فيثاغورس

$$(UV)^2=(OU)^2+(OV)^2$$

$$(a+2)^2+(2-3)^2=(-2)^2+(3)^2+(a)^2+(2)^2$$

$$a^2+4a+4+1=4+9+a^2+4$$

$$\Rightarrow 4a=12\Rightarrow \boxed{a=3}$$

مركز الدائرة هو نقطة المنتصف u,v

$$M\left(\frac{3+-2}{2},\frac{2+3}{2}\right)=\left(\frac{1}{2},\frac{5}{2}\right)$$

$$2r=\sqrt{(3-2)^2+(-2-3)^2}=\sqrt{26}\Rightarrow r=\frac{\sqrt{26}}{2}$$

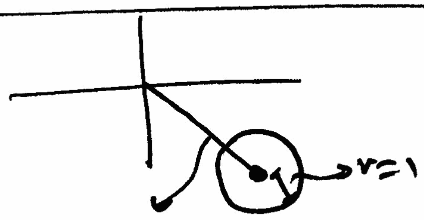
$$|z-z_1|=r\Rightarrow\left|z-\left(\frac{1}{2}+\frac{5}{2}i\right)\right|=\frac{\sqrt{26}}{2}$$

$$\boxed{\left|z-\frac{1}{2}-\frac{5i}{2}\right|=\frac{\sqrt{26}}{2}}$$

إذا كان العدد المركب z يحقق المعادلة $|z-4+3i|=1$ فإن أكبر قيمة لـ $|z|$ هي

a) 5 b) 6 c) 25 d) 26

الحل



$|z| = 5+1 = 6 \Rightarrow \boxed{b}$

عظمى

$|4-3i| = 5$

أثبت أن $|z-6| = 2|z+6-9i|$ تمثل معادلة دائرة، ثم جد مركزها ونصف قطرها

$|x+iy-6| = 2|x+iy+6-9i|$

$\sqrt{(x-6)^2+y^2} = 2\sqrt{(x+6)^2+(y-9)^2}$

$x^2-12x+36+y^2 = 4(x^2+12x+36+y^2-18y+81)$

$3x^2+60x+3y^2-72y+432=0$

$x^2+\underset{+100}{20x}+y^2-24\underset{+144}{y}+144=0 \quad \underset{+144}{+100}$

$(x+10)^2+(y-12)^2 = 100$

$(x+10)^2+(y-12)^2 = (10)^2$

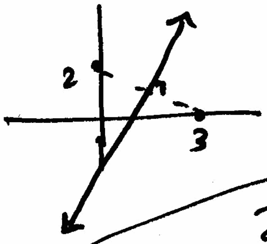
مركزها $(-10,12)$

نصف قطر 10

جد المحل الهندسي الذي تمثله المعادلة $|z-3|=|z-2i|$
ومثله بيانياً

$|z-(3+0i)|=|z-(0+2i)|$

منصف عمودي للقطعة المستقيمة التي تصل بين (3,0)(0,2)



المنصف العمودي $|z-3|=|z-2i|$ يكافئ بالصيغة الديكارتية:

a) $6x-4y-5=0$ b) $6x-4y+5=0$ c) ~ d) ..

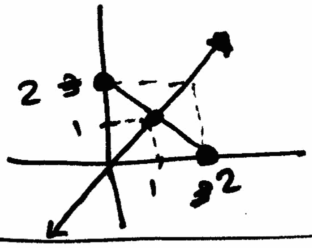
$|x+iy-3|=|x+iy-2i| \Rightarrow \sqrt{(x-3)^2+y^2}=\sqrt{x^2+(y-2)^2}$

$\cancel{x^2}-6x+9+\cancel{y^2}=\cancel{x^2}+\cancel{y^2}-4y+4$

$-6x+9+4y-4=0 \Rightarrow -6x+4y+5=0$

$6x-4y-5=0 \Rightarrow \boxed{a}$

جد بدلالة z معادلة المحل الهندسي
المبين في الشكل المجاور



القطعة المستقيمة الواصلة بين (2,0)(0,2) ← نقطة المنتصف $\left(\frac{2+0}{2},\frac{0+2}{2}\right)$
$=(1,1)$

ميلها $\frac{2-0}{0-2}=-1$ ← ميل المستقيم
$\frac{1-0}{1-0}=+1$

ميل القطعة × ميل المستقيم
$-1 = 1 \cdot -1$ متعامدان

المستقيم ينصف القطعة
& عمودي عليها

منصف عمودي

$|z-2+0i|=|z-0+2i|$

$|z-2|=|z-2i|$

جد العدد المركب الذي يحقق كل من المحل الهندسي $|Z-3|=|Z+2i|$ والمحل الهندسي $|Z+3-i|=|Z-1+5i|$

① $|x+iy-3|=|x+iy+2i| \Rightarrow \sqrt{(x-3)^2+y^2}=\sqrt{x^2+(y+2)^2}$

$x^2-6x+9+y^2=x^2+y^2+4y+4$

$-6x-4y+9-4=0 \Rightarrow \boxed{6x+4y-5=0}$

② $|x+iy+3-i|=|x+iy-1+5i|$

$\sqrt{(x+3)^2+(y-1)^2}=\sqrt{(x-1)^2+(y+5)^2}$

$x^2+6x+9+y^2-2y+1=x^2-2x+1+y^2+10y+25$

$6x+2x-2y-10y+9+1-1-25=0$

$8x-12y-16=0 \Longrightarrow \boxed{2x-3y-4=0}$

$$\begin{aligned} 6x+4y&=5\\ -6x+9y&=-12 \end{aligned}$$

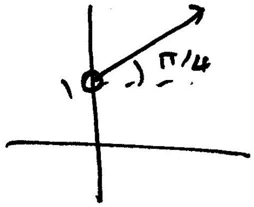
ج. $13y=-7 \Rightarrow \boxed{y=\frac{-7}{13}}$

$6x+4\left(\frac{-7}{13}\right)=5 \Longrightarrow \boxed{x=\frac{31}{26}}$

$\Longrightarrow z=x+iy$

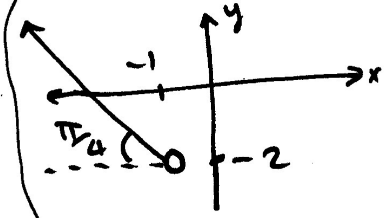
$$\boxed{z=\frac{31}{26}-\frac{7}{13}i}$$

جد المحل الهندسي الذي تمثله المعادلة $\operatorname{Arg}(z-i)=\frac{\pi}{4}$ ،
ثم مثله بيانياً



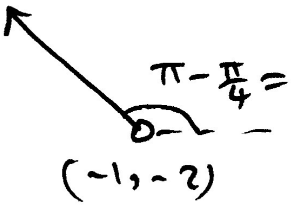
شعاع يبدأ بالنقطة $\operatorname{Arg}(z-(0+i))=\frac{\pi}{4}$
ولا يشملها، ويصنع زاوية قياسها $\frac{\pi}{4}$
مع المستقيم الذي يوازي المحور الحقيقي

معادلة المحل الهندسي المبين في الشكل المجاور هي



a) $\operatorname{Arg}(z-1-2i)=-\frac{\pi}{4}$
b) $\operatorname{Arg}(z+1+2i)=\frac{\pi}{4}$
c) $\operatorname{Arg}(z+1+2i)=\frac{3\pi}{4}$
d) $\operatorname{Arg}(z+1+2i)=-\frac{\pi}{4}$

الحل

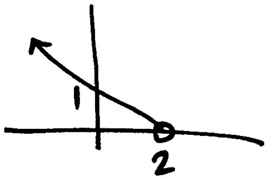


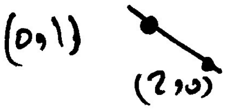
$\pi-\frac{\pi}{4}=3\frac{\pi}{4}$

$\operatorname{Arg}(z-(-1-2i))=\frac{3\pi}{4}$

$\operatorname{Arg}(z+1+2i)=\frac{3\pi}{4}$ $\boxed{c}$

جد معادلة الشعاع المبين في الشكل

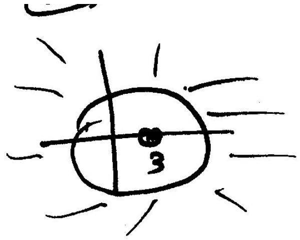




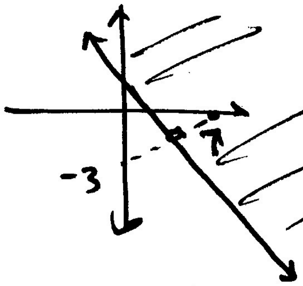
$\Longrightarrow \tan\theta=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{1-0}{0-2}=-\frac{1}{2}\Longrightarrow \boxed{\theta=\pi-\tan^{-1}\frac{1}{2}}$

ربع ثاني ← منفرجة ←

$\boxed{\operatorname{Arg}(z-2)=\pi-\tan^{-1}\frac{1}{2}}$

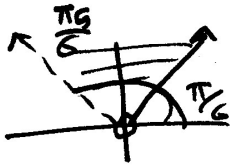


مثل في المستوى المركب $|Z-3| \geq 5$



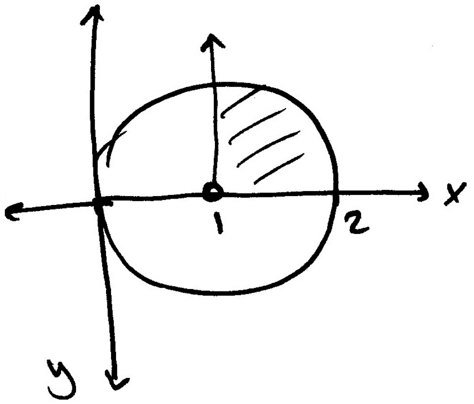
الجواب

مثل في المستوى المركب $|Z-7| \leq |Z+3i|$



الجواب

مثل في المستوى المركب $\frac{\pi}{6} \leq Arg\ Z < \frac{5\pi}{6}$



ما هي المتباينات التي تمثلها المنطقة المظللة في الشكل المجاور

الحل $|Z-1| \leq 1$

$$0 \leq Arg(Z-1) \leq \frac{\pi}{2}$$

2023
جيل 2005

إذا كان: $\sqrt{-1} = i$ ، فإنّ قيمة المقدار $i^{2021} \times \sqrt{-4}$ هي:

a) 2 b) -2 c) $2i$ d) $-2i$

$$i^{2021} \cdot 2i = 2\, i^{2022} = 2.(i^2)^{1011}$$

$$= 2(-1)^{1011} = -2 \longrightarrow \boxed{b}$$

2023
جيل 2005

إذا كان: $3(x+y) + 4(3x-y)i = 43 + (32-y)i$ ،

فإنّ قيمة x الحقيقية التي تحقق المعادلة هي:

a) -5 b) 5 c) $-\frac{1}{5}$ d) $\frac{1}{5}$

$$3(x+y) = 43 \Longrightarrow 3x+3y = 43$$

$$4(3x-y) = 32-y \Longrightarrow 12x - 3y = 32$$

$$15x = 75 \Longrightarrow \boxed{x=5} \Longrightarrow \boxed{b}$$

2023
جيل 2005

إذا كان: $k > 0$, $z = \frac{3}{k} - 2\sqrt{2}\,i$ ، وكان: $|z| = 3$ ، فإنّ قيمة الثابت k هي:

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4

$$|z| = 3 \Rightarrow \sqrt{\left(\frac{3}{k}\right)^2 + (-2\sqrt{2})^2} = 3$$

$$\frac{9}{k^2} + 8 = 9 \Rightarrow \frac{9}{k^2} = 1 \Rightarrow k = \pm 3 \xrightarrow{k>0} k = 3 \ \boxed{c}$$

2023
جيل 2005

إذا كان: $\frac{a^2+b^2}{a+bi} = 2+3i$ ، حيث a و b عددان حقيقيان لا يساوي أي منهما الصفر،

فإنّ قيمة $a \times b$ هي:

a) 1 b) -1 c) 6 d) -6

$$\frac{a^2+b^2}{a+bi} \cdot \frac{a-bi}{a-bi} = \frac{\cancel{a^2+b^2}}{\cancel{a^2+b^2}}\, a-bi = a-bi$$

$$\therefore a-bi = 2+3i \longrightarrow \begin{matrix} a=2 \\ b=-3 \end{matrix} \longrightarrow a.b = -6 \ \boxed{d}$$

2023
جيل 2005

إذا كان: $a+4i$ هو أحد الجذور التربيعية للعدد المركب $-7-24i$ ، فإنّ قيمة الثابت a هي:

a) -3 b) 3 c) -4 d) 4

$$a+4i = \sqrt{-7-24i}$$

ربع

$$a^2+8ai-16 = -7-24i$$

$$(a^2-16)+(8a)i = -7-24i$$

$$a^2-16=-7 \Rightarrow a^2=9 \Rightarrow a=3 ، -3$$

$$8a = -24 \Rightarrow a = -3$$

المشترك $\rightarrow$ $\boxed{a=-3}$

$\boxed{a}$

2023
جيل 2005

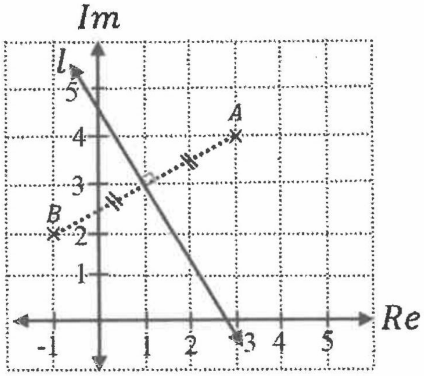
معتمدًا الشكل الآتي، ما معادلة المستقيم l (بدلالة z) المُمثَّل بيانيًا ؟

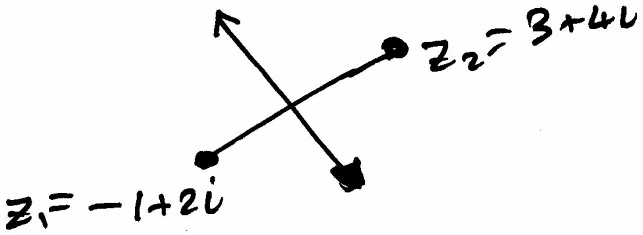
a) $|z+1-2i| = |z-3-4i|$

b) $|z-1+2i| = |z+3+4i|$

c) $|z+1-2i| = |z+3+4i|$

d) $|z-1+2i| = |z-3-4i|$





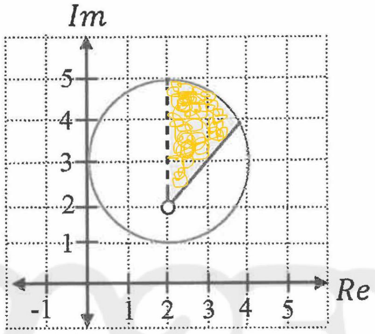
$$|z-z_1| = |z-z_2| \Rightarrow |z-(-1+2i)| = |z-(3+4i)|$$

$$|z+1-2i| = |z-3-4i| \quad \boxed{a}$$

2023
جيل
2005

اكتب (بدلالة z) نظام متباينات يُمثّل المحل الهندسي الذي تُمثّله المنطقة المظللة في الشكل الآتي.

(10 علامات)



مهارة

الدائرة

مركز الدائرة $(2,3) \Rightarrow Z_0 = 2+3i$

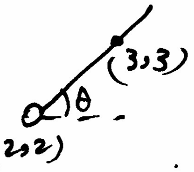
نصف قطرها $= \Delta y = 5-3 = 2 \Rightarrow r = 2$

$\therefore$ معادلة الدائرة $\Rightarrow |Z - Z_0| = r \Rightarrow |Z-(2+3i)| = 2$

التظليل داخل الدائرة (والخط متصل $\Leftarrow$ مساواة) $\Rightarrow$ $\boxed{|Z - 2+3i| \leq 2}$

اقل

الشعاع الاول



$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{3-2}{3-2} = 1$

$\tan\theta = 1 \Rightarrow \boxed{\theta = \frac{\pi}{4}}$

$\Leftarrow$ الخط متصل $\Leftarrow$ مساواة

الشعاع الثاني $\boxed{\theta = \frac{\pi}{2}} \Rightarrow$ الخط متقطع $\Rightarrow$ لا يوجد مساواة

رأس الشعاع $(2,2) \Rightarrow Z_0 = 2+2i$

$$\theta_1 \leq Arg(Z - Z_0) < \theta_1$$

$$\boxed{\frac{\pi}{4} \leq Arg(Z-2-2i) < \frac{\pi}{2}}$$

و $|Z-2-3i| \leq 2$

ملاحظة : بالغت في النموذجية

النهاية